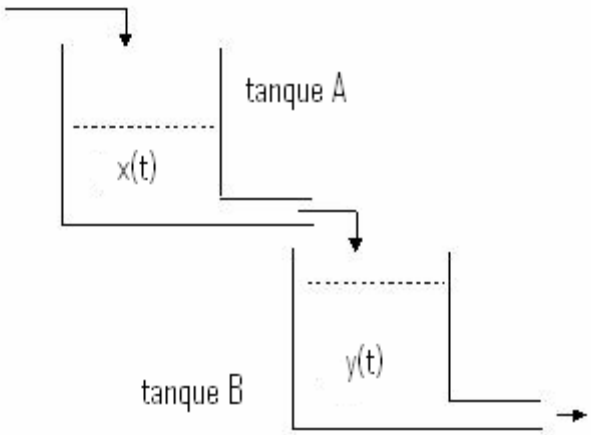
Ecuaciones Diferenciales I
Práctica 5

El problema de los dos tanques

1. Planteamiento del problema

Dos tanques A y B se encuentran "conectados" de tal forma que hay un paso de fluidos entre el tanque A hacia B por medio de una válvula como se muestra en la Figura de abajo. De igual forma se considera que el tanque B cuenta con una válvula desde la cual se drena su contenido.



El tanque A contiene una solución de 100 galones en la que se encuentran disueltas 20 libras de sal. De igual forma, el tanque B cuenta con una solución de 200 galones en la cual se encuentran disueltas 40 libras de sal. Por otra parte, al tanque A se le inyecta agua a una razón de 5 galones por segundo y que por la válvula que conecta A con B se transfieren 5 galones por segundos de la solución. De igual forma, del tanque B se drena a una razón de 5 galones por segundo. ¿Cuál es la cantidad de sal en el tanque B después de un minuto de haber abierto las válvulas?

2. Observaciones

Este es un problema donde se involucra un "balance de masa" debido a que hay una solución que sale, otra que entra, y no hay pérdida en la transferencia. El problema se enfoca a identificar la cantidad de sal entre los tanques (podemos incluso ir más y hablar de la concentración de la solución). Dado que B se encuentra conectado con A, observaremos una dependencia de concentración. Por otra parte, se considera que al verter las soluciones estas se mezclan uniformemente, esto es, un problema soluto-solvente (sal-agua, es este caso). Lo cual no siempre es cierto, pero para la idea general del problema será suficiente.

3. Procedimiento

Planteemos el problema del balance de la cantidad de sal en cada uno de los tanques en función del tiempo y a partir de ahí describamos las ecuaciones que gobiernan este sistema de intercambio de fluidos.

4. Datos

1. El tanque A cuenta con volumen de 100 gal, donde hay 20 lb de sal, esto es en el inicio la concentración de sal es de 20 lb.
2. El tanque B cuenta con un volumen de 200 gal, en el que se encuentra disuelta 40 lb de sal, esto es, el en inicio la concentración es de 40lb
3. Al tanque A se le inyecta agua, a una razón de 5 gal/s por lo que su concentración de sal varía, irá este disminuyendo.
4. El tanque B recibe la solución del tanque A a razón de 5gal/s y es drenada a razón de 5 gal/s; sin embargo, la concentración (cantidad de masa por volumen) B es distinta que en A. Cómo se comportará ésta? Es una de las cuestiones que nos importará resolver.

5. Notación

Llamemos $x(t)$ a la cantidad de sal (masa) de la solución en el paso del tiempo del tanque A. $\frac{dx}{dt}$ representa la tasa de cambio de contenido de sal en el tanque A.

Llamemos $y(t)$ a la cantidad de sal (masa) de la solución en el paso del tiempo del tanque B. $\frac{dy}{dt}$ representa la tasa de cambio de contenido de sal en el tanque B.

Llamemos $C_A(t)$ la concentración de de sal en el tanque A y $C_B(t)$ a la concentración de de sal en el tanque B.

6. Obtención del modelo

La tasa de cambio de la cantidad de sal en los tanques, se rige por la diferencia entre la tasa de entrada y la de salida (balance de masa)

$$\frac{dx}{dt} = tasa\ de\ entrada - tasa\ de\ salida$$

$$\frac{dy}{dt} = tasa\ de\ entrada - tasa\ de\ salida$$

La tasa de entrada (salida) para el tanque A es

$$tasa\ de\ entrada\ (salida) = flujo\ de\ entrada\ (salida)\ x\ concentración$$

Para el caso del tanque A, tenemos que se inyecta agua pura, es decir, no hay concentración de sal, esto se hace a una razón de 5 gal/s, por lo que

7. Solución analítica del modelo

8. Grafica de la concentración de sal en los tanques

9. Solución al problema planteado

10. Códido Matlab empleado