Ecuaciones Diferenciales Ordinarias I
Práctica 4

Ayudante: Guilmer González — Días 13 y 15 de abril, 2004

Veremos: **algunas ideas sobre el problema del paracaidista**.

En la clase de ayer, discutimos sobre la segunda ley de Newton en presencia de una fuerza de resistencia, en particular, la obtenida por el aire:

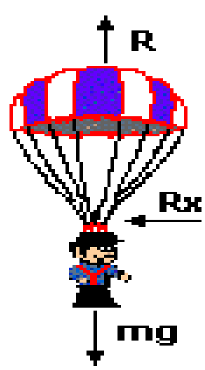
$$F = -mg + R(x, v)$$

donde $R(x, v) = -r(x, v)v$, siendo r no negativa. El caso más simple es cuando r es constante, obteniendo el modelo

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - rv.$$

Un problema interesante, viene dado por el **problema del paracaidista**:

> Un paracaidista se encuentra en un aereoplano a 1200ft sobre la tierra, y con una velocidad cero en la vertical. Se lanza al vacío para llegar con una velocidad de 40 ft/s al suelo. Se asume que el tipo tiene un peso de 240 lb con todo y equipo. Se asume que la fuerza de resistencia es proporcional a la velocidad. La constante de proporcionalidad es 2 antes de que abra el paracaídas y 10 después. La pregunta es ¿En qué tiempo debe abrir el paracaídas para caer con una velocidad de 40 ft/s?



Este problema es un problema clásico en ODE. Veamos algunas ideas detrás del modelo.

Modelo básico: El movimiento del paracaidista está regido por la segunda ley de Newton del movimiento. Balanceando las fuerzas involucradas de aceleración, gravedad y resistencia del aire obtenemos una ecuación de segundo orden con condiciones iniciales

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg - k\frac{dx}{dt} \qquad x(0) = x_0; \;\; \frac{dx}{dt}(0) = 0 \tag{1}$$

donde x es la altura a la que se encuentra el paracaidista por encima de la superficie de la tierra, m es la masa del tipo, g es la constante de gravedad y k es el coeficiente de la resistencia del aire. Un modelo equivalente que representa a la velocidad del paracaidista es el sistema lineal

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -g - \frac{k}{m}v, \qquad v(0) = 0 \\ \frac{dx}{dt} &= v \qquad x(0) = x_0 \end{aligned} \tag{2}$$

Este problema de valores iniciales tiene la ventaja de que la ecuación de velocidad (2) puede ser resuelta como una ecuación de primer orden y la posición x es obtenida por integración:

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(e^{-tk/m} - 1\right) \tag{3}$$

$$x(t) = x_0 + \frac{m^2 g}{k^2}\left(-\frac{k}{m}t + (1 - e^{-tk/m})\right) \tag{4}$$

Un modelo simpático, sin embargo no es realista. k podría ser lineal en el tiempo. En lo particular existe una resistencia al aire diferente antes y después de abrir el paracaídas.

Modelo ampliado: Sin embargo, k no es constante para este problema. Dado que el paracaidas se abre en un tiempo t_d, es natural observar que la forma del coeficiente de la resistencia del aire tiene una forma

$$k(t) = \begin{cases} k_1, & \text{para } t < t_d \\ k_2, & \text{para } t \geq t_d \end{cases}$$

una resistencia antes de abrir el paracaídas y otro posterior al hacerlo.

Es importante señalar que la expresión k/m que aparece en la ecuación diferencial debe estar en términos de 1/tiempo por lo que los parámetros k y m deben ser "analizados" para evitar problemas en los ssistemas CGS y MKS. Para este caso particular, considere

$$k_1/m = 4/15 \qquad\qquad k_2/m = 4/3$$

Una vez que hemos considerado que el paracaidista saltará y a determinado tiempo abrirá el paracaídas se obtendrá una ecuación diferencial para la velocidad con valor valor inicial distinto, la velocidád que lleva el paracaidista en el momento t_d en que tira del paracaídas. La velocidad posterior a este tiempo es

$$v(t) = \frac{mg}{k_1}\left(e^{-t_d\frac{k_1}{m}} - 1\right)e^{-\frac{k_2}{m}(t-t_d)} + \frac{mg}{k_2}\left(e^{-\frac{k_2}{m}(t-t_d)} - 1\right)$$

y desde luego, saber el comportamiento del descenso.

Práctica: Discuta en clase este modelo y obtenga de manera analítica la representación de la velocidad. Si hay físicos presentes, que comenten sobre el uso correcto de las unidades de medida. Grafique el comportamiento de la solución. Realice experimentos para el tiempo en que se abre el paracaídas y el comportamiento de la velocidad.

1. Obtenga un modelo analítico para la solución del problema del paracaidista.

2. Desarrolle un `script` `parachute.m` en Matlab para graficar el comportamiento del modelo.

   (a) En `parachute.m` pida los valores involucrados: la masa, la altura, el tiempo en que abre el paracaidas, el tiempo total de cómputo.

(b) Asigne los valores para la resistencia del aire, la aceleración de la gravedad, no olvide que debe ser congruente con el sistema métrico a usar.

(c) Grafique la velocidad contra el tiempo. Observe.

(d) Grafique la altura contra el tiempo. Observe.

(e) Experimente con diferentes valores para la el tiempo en que se abre el paracaidas. Saque conclusiones

3. En cada experimento, ¿Podria indicar en qué tiempo el paracadista llega a la superficie de la tierra? Cuándo se acerca a la velocidad terminal con 1% de error? Tip: Use el método de Newton.

4. Revise el modelo ampliado y escriba de manera analítica la solución, haga los pasos para resolver el problema oroginal.

5. Experimente con distintos valores del tiempo para abrir el paracaídas. Grafique y observe.

6. Si no se abre el paracaídas oportunamente el compadre sufre un accidente. En qué momento debe tirar del paracaídas? Vamos, cuál es el tiempo máximo para abrir el paracaídas y llegue a salvo a la superficie. Haga algunas observaciones y elabore un reporte.

Lineamientos para la entrega del Reporte de trabajo

1. Introducción. Se describe el problema en forma breve.

2. Formule las ecuaciones. Escriba las ecuaciones que rigen el problema y su solución, haga todos los pasos.

3. Soluciones al problema:

   (a) El máximo tiempo para abrir el paracaídas. Grafique la curva e indique valores.

   (b) El menor tiempo de descenso. Grafique la curva e indique valores.

4. Conclusiones y recomendaciones. Con respecto al problema.

5. Añada el código desarrollado.