Ecuaciones Diferenciales Ordinarias I
Práctica 3

Ayudante: Guilmer González Jueves 01 de abril, 2004

Hoy, veremos: **algunos puntos importantes dentro del modelo logístico discreto**.

En la clase de ayer, observamos un modelo discreto de poblaciones en la forma

$$P_{k+1} = f(P_k)$$

este modelo introduce una dinámica en la reproducción del población a través de un mapeo iterativo, la población de la siguiente generación, depende de la anterior. La función f se le conoce como *función de actualización* y es la que produce la siguiente población bajo el esquema iterativo.

A manera de ejemplificar, la llamada función de actualización, comentamos sobre un modelo exponencial

$$P_{k+1} = r * P_k$$

donde r es la tasa de crecimiento. Se discutió de que este modelo no es realista, y se planteó un modelo que depende en función de la población anterior

$$P_{k+1} = r(P_k) * P_k$$

donde $r(P_k)$ puede ser modelado bajo consideraciones elementales, por ejemplo

1. Cuando la población es baja $r > 1$ y la población sobrevivirá a la siguiente generación.

2. Cuando la población es alta, $r < 1$ y la población disminuirá en la siguiente generación.

Una representación de estas ideas la podemos trazar como se observa en la Figura 1.

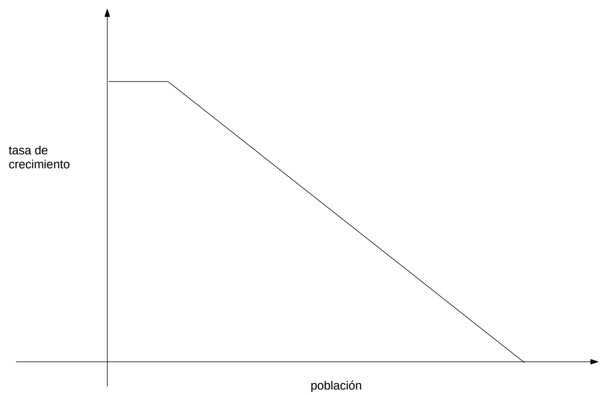

Figura 1: Primera idea del comportamiento población–tasa de crecimiento.

Es de observarse que cuando la población es relativamente "pequeña" la tasa de crecimiento sea constante, lo cual es razonable. Una población muy pequeña en un habitat grande tiende a reproducirse rápidamente, hasta que la población sea grande y esta afecte el crecimiento.

Las más simples funciones $r(p)$ son funciones lineales, ver la Figura 2.

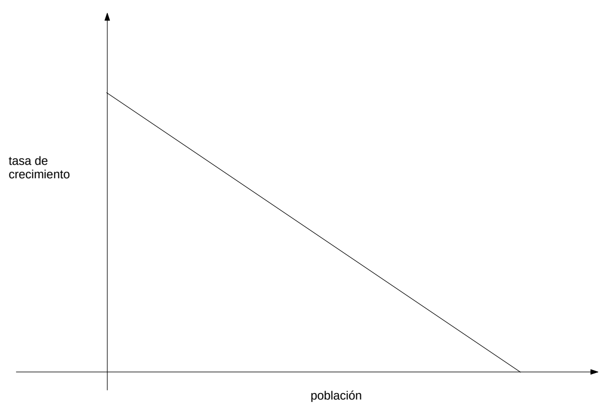

Figura 2: Idea simplificada del comportamiento población–tasa de crecimiento.

En clase obtuvimos un modelo discreto

$$P_{k+1} = (r_0 - \frac{r_0}{P_G} P_k) * P_k$$

donde P_G es la población esperada en tasa de crecimiento nulo.

Este modelo lo podemos normalizar

$$\frac{P_{k+1}}{P_G} = (r_0 - \frac{r_0}{P_G}P_k) * \frac{P_k}{P_G}$$

obteniendo una expresión del estilo

$$x_{k+1} = r_0(1 - x_k)x_k$$

veamos su comportamiento, veamos si este procedimiento iterativo converge, se estabiliza, forma caos, se logran bifurcaciones, veamos algunas ideas primero.

Práctica: Veamos este procedimiento desde el punto de vista de un punto fijo, iniciamos con un punto $x = x_0$ y obtenemos $x_1 = f(x_0)$, esto gráficamente representa tirar x_0 a la gráfica de $f = f(x)$ y éste valor aventarlo a la recta $y = x$ para ser usado en el siguiente paso.

1. Baje la rutina `logistic.m` de la página del curso. En ella se describe el procedimiento.

2. Lea esa rutina, es importante entenderla.

3. Desarrolle un `script` `population1.m` en Matlab para graficar el comportamiento del modelo discreto.

   (a) En `population1.m` pida los valores iniciales, la tasa de crecimiento, así como el número de iteraciones para el procedimiento iterativo.

   (b) Mande a llamar la rutina con los valores de entrada.

   (c) Grafique los valores obtenidos y observe.

   (d) Ahora grafique la función $f = f(x)$ y trace el comportamiento del procedimiento iterativo.

   (e) Experimente con diferentes valores para la tasa de crecimiento entre 0 y 4. ¿Qué observa? Comente en clase y saque conclusiones.

4. Modifique `population1.m` para graficar puntitos `plot(hist,'.')`, y experimente para los siguientes valores: $r = 3.4$, $r = 3.5$, y $r = 3.6$. ¿Qué observa? ¿Nota algún patrón en la solución? Explique.

5. Si contaramos con una coleción de datos vamos, de observaciones, sobre la población conforme al tiempo, de qué forma podriamos estimar la tasa de crecimiento para usar este modelo?