

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias I

Lectura 4

Ayudante: Guilmer González

Día 4 de mayo, 2004

Veremos: **algunas ideas sobre valores propios.**

Los valores propios y vectores propios juegan un rol sumamente importante en las ecuaciones diferenciales ordinarias, y en muchas aplicaciones de la física, así como del cómputo visual. Veamos algunos aspectos elementales.

Definiciones

Sea A una matriz real de $n \times n$. Se dice que el número λ es un vector propio de A , si existe un vector v distinto de cero tal que

$$Av = \lambda v \tag{1}$$

en cuyo caso, el vector v se le conoce como vector propio de A correspondiente a λ .

Calculando los valores propios

La condición (1) puede escribirse en la forma

$$(A - \lambda I)v = 0 \tag{2}$$

donde I es la matriz identidad. Cuál sería una interpretación geométrica de los vectores propios y valores propios? Ahora bien, dado que v debe ser no cero, se sigue que $A - \lambda I$ no debe ser invertible. ¿Por qué?

Con esto, el determinante de $A - \lambda I$ debe ser cero.

Llamemos al determinante de $A - \lambda I$, el polinomio característico de A .

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Los valores propios de A son las raíces del polinomio característico de A .

Ejemplo Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Entonces

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & -4 \\ -1 & -1 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (2 - \lambda)(-1 - \lambda) - (-4)(-1) \\ &= \lambda^2 - \lambda - 6 \\ &= (\lambda - 3)(\lambda + 2) \end{aligned}$$

Para encontrar los vectores propios, correspondientes a los valores propios $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -2$, debemos de resolver el sistema

$$(A - \lambda I)v = 0$$

Ejercicios

1. Del ejemplo anterior, encuentre los vectores propios.
2. Encuentre los valores propios y vectores propios correspondientes de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Encuentre los valores propios y vectores propios correspondientes de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix}$$