Ecuaciones diferenciales de primer orden

Tienen la forma

$$y'(t) = a(t)\, y(t) + b(t) \qquad (*)$$

donde $a = a(t)$ y $b = b(t)$ son funciones reales.

o en forma general

$$c(t)\, y'(t) = a(t)\, y(t) + b(t) \qquad (**)$$

Tendremos en mente la forma $(*)$

$$y' = a(t)\, y + b(t)$$

Si $b \equiv 0$, tenemos la ecuación homogênea

$$y'(t) = a(t)\, y(t)$$

asociada a $(*)$

Ejemplos.

$$y' = \tan(t)\, y$$ lineales

$$y' = e^{2x} y - x^2$$

$$y' = \tan y \cos x$$ no lineales

$$y' = y^2 y' + xy$$

Regresemos al caso homogéneo

$$y'(t) = a(t)\, y(t)$$

usando variables separables tenemos.

$$\frac{dy}{y} = a(t)\, dt$$

$$\ln|y| = \int a(t) + c$$

$$|y| = e^{\int a(t) + c}$$

esto es

$$y = A e^{\int a(t)\,dt}$$

Ejemplo.

Resolver.
$$y' = \operatorname{sen} t \; y$$

$$\boxed{y = A \cdot e^{-\cos t}}$$

Regresemos a la ecuación diferencial no homogénea

$$y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t)$$

esta la escribimos como

$$y'(t) - a(t)\,y(t) = b(t) \qquad (***)$$

la parte izquierda de (***) tiene la "forma" de la derivada de un producto, partamos de esta idea

Si pudiesamos encontrar $u = u(t)$ de tal forma que

$$u(t)\left[y'(t) - a(t)y(t)\right] = \left(u(t)\,y(t)\right)'$$

entonces (***) la escribimos como.

$$\left(u(t)\,y(t)\right)' = u(t)\,b(t)$$

Integrando

$$u(t)\,y(t) = \int u(t)\,b(t)\,dt + C$$

y la solución sería:

$$(\Delta) \qquad y(t) = \frac{1}{u(t)} \int u(t)\, b(t)\, dt + \frac{c}{u(t)}$$

Básicamente la idea es encontrar $u = u(t)$,

el factor de integración

El punto esencial en este procedimiento es encontrar $u = u(t)$ tal que

$$u(y' - ay) = (uy)'$$

desarrollando tenemos

$$uy' - auy = uy' + u'y \, ;$$

lo cual es cierto si

$$\boxed{u' = -a\,u} \qquad (\square)$$

la cual es una ecuación homogénea, una ~~toda~~ solución es

$$u(t) = e^{-\int a(t)\,dt}$$

Por qué no requerimos la solución general de $(\square)$?

Problema

Resolver

$$y' = ay + b \qquad (1)$$

Método

1] Escribir (1) como

$$y' - ay = b$$

2] Encontrar una función factor de integración $u = u(t)$ de tal forma que

$$(uy)' = u[y' - ay] \qquad (2)$$

una es

$$u(t) = e^{-\int a(t)\,dt}$$

3] De (2) y (1) tenemos

$$(uy)' = ub \qquad (3)$$

4] Encontrar la solución a (3).

en este caso

$$u(t)\,y(t) = \int u(t)\,b(t) + c$$

y entonces

$$y(t) = \frac{1}{u(t)} \int u(t)\,b(t) + \frac{c}{u(t)}$$

Obs. Visto como un procedimiento de cómputo, ¿cuándo es recomendable usar este método?

Ejemplo. Encontrar una sol. particular de

$$\boxed{\begin{array}{l} y' = y \operatorname{sen} t + 2t\,e^{-\cos t} \\ \text{para } \; y(0) = 1 \end{array}}$$

Regresemos al problema original

$$y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t) \qquad (1)$$

Consideremos la homogénea asociada

$$y'(t) = a(t)\,y(t) \qquad (2)$$

sea $y_h = y_h(t)$ una solución de la homogénea

en este caso si
$$y_h'(t) = a(t)\,y_h(t)$$

sabemos que
$$y_h(t) = e^{\int a(t)\,dt}$$

La ideas es proponer a $y(t) = v(t)\,y_h(t)$

como solución de la no homogénea (1), de

encontrar $v(t)$ tenemos la sol. de (1).

Sustituyendo en (1) tenemos

$$(v y_h)' = a(t)\, v y_h + b(t)$$

de ahí

$$y_h' v + v' y_h = a v y_h + b$$

$$v (y_h' - a y_h) + v' y_h = b$$

$$v' y_h = b$$

$$\Rightarrow \boxed{v' = b / y_h}$$

y entonces integramos

$$\boxed{v(t) = \int \frac{b(t)}{y_h(t)}\, dt + C}$$

"Método de variación de parámetros"

la solución a (1) es

$$y(t) = y_h(t) \int \frac{b(t)}{y_h(t)}\, dt + c\, y_h(t)$$

Observando este método como un procedimiento de cálculo o cómputo; ¿Cuándo es razonable aplicarlo?

1] Discuta y señale

2] Hay alguna relación con el anterior método?

Ejercicios

1] Resolver $y' = my + c_1 e^{mx}$; m y c_1 reales

2] Encontrar una solución a la Ecn. Dif.

$$y' = y + 2t e^{2t}$$

3] $y' + y \cos t = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t$

20/marzo/2004