Geometría Analítica II

LECTURA 1

Ayudante: Guilmer González Día 9 de febrero, 2016

El día de hoy veremos:

0. Comentarios sobre como presentar los trabajos.

1. Transformaciones lineales entre triángulos.

1 Un procedimiento general para construir una transformación lineal entre triángulos

Un problema de sumo interés en graficación de objetos geométricos es transformar un triángulo en otro sobre el plano.

La idea es sencilla, se basa en: tres puntos definen un sistema coordenado local sobre el plano, luego, desde el punto de vista geométrico, se trata de una transformación entre sistemas de referencia.

Revise la página

`http://www.matematicas.unam.mx/gfgf/ga20061/`

ahí, encuentre la Lectura 6: `Cambio de coordenadas entre sistemas de referencia`.
De igual manera, este fin de semana busque la página

`http://www.matematicas.unam.mx/gfgf/ga20052/`

ahí, encuentre la `Segunda parte`, notas que se encuentran en la sección Lecturas.

En clase se planteó un problema simple: Transformar el triángulo formado por los puntos $P_1(0,0)$, $P_2(1,0)$ y $P_3(0,1)$ a otro triángulo de coordenadas $P_1'(x_1,y_1)$, $P_2'(x_2,y_2)$ $P_3'(x_3,y_3)$, en ese orden.

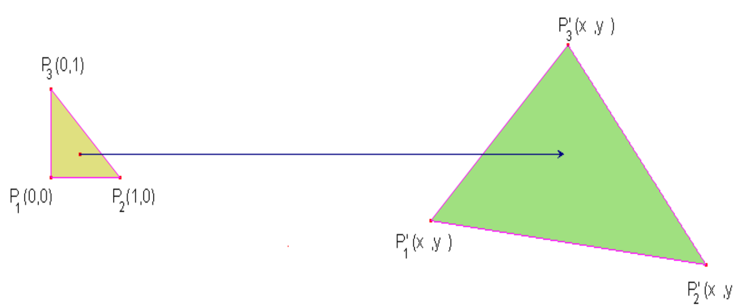

Figura 1: Transformando un triángulo sencillo en otro.

La transformación más simple es una función lineal en x y y. Esto es, si $P'(x', y')$ es un punto en el segundo sistema de referencia, ese se puede escribir como:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 \\ y' &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 \end{aligned} \tag{1}$$

Un punto $P(x, y)$ es transformado a un punto $P'(x', y')$ bajo esa relación.

Como se observa, la correspondencia $P_i' = T(P_i)$ nos da lugar a un sistema de ecuaciones, 6 condiciones, 6 incógnitas.

Primer punto: $P_1'(x_1', y_1') = T((0, 0))$

Bajo esto, la transformación (**??**) la escribimos como

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \\ y_1' &= \beta_1 \cdot 0 + \beta_2 \cdot 0 + \beta_3 \end{aligned}$$

lo que nos lleva a

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= x_1' \\ \beta_3 &= y_1' \end{aligned} \tag{2}$$

Segundo punto: $P_2'(x_2', y_2') = T((1, 0))$

$$\begin{aligned} x_2' &= \alpha_1 1 + \alpha_2 \cdot 0 + x_1' \\ y_2' &= \beta_1 1 + \beta_2 \cdot 0 + y_1' \end{aligned}$$

resolviendo nos lleva

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= x_2' - x_1' \\ \beta_1 &= y_2' - y_1' \end{aligned} \tag{3}$$

Dada la caraterística del tercer punto a mapear, es fácil ver que

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= x_3' - x_1' \\ \beta_2 &= y_3' - y_1' \end{aligned} \tag{4}$$

y con esto ya tenemos los 6 parámetros para definir adecuadamente la transformación lineal de (**??**).

2 Forma matricial

Las matrices juegan un rol muy importante en el manejo compacto de la información y nos permite definir propiedades de las transformaciones a partir de su estrucuta; esto es, podemos caracterizar el tipo de trasnformación si sabemos que tipo de matriz es la que representa.

Una referencia en internet rápida sobre matrices la puede encontrar en

`http://almez.cnice.mecd.es/~adelared/Teoria/MATRICES.doc`

Es un documento en Word y en español. Aquí, nos interesa el concepto algebraico de vector como un arreglo o colección de número de la forma

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

o bien

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

donde las entradas a_1, a_2 son los elementos correspondientes del vector $\vec{a}$. Una matriz la vamos a considerar como una colección de vectores, horizontales o verticales (`comentar en clase, sobre esto y como usualmente denotamos los vectores columna y fila`)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Definimos el producto interior (o punto) $\cdot$ entre dos vectores de la forma:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Lo interesante de manejar la información de esta manera es que podemos simplicar operaciones. Por ejemplo, el sistema lineal que hemos estado manejando, lo podemos escribir en su forma matricial como:

$$\vec{P'} = \mathbf{A}\vec{P} + b \tag{5}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}; \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

`Comentar esta forma, despanzurrarla en clase y hacer ver las dos formas en que este sistema se puede escribir, por columnas, por filas.`

Como se ha visto en sistemas de ecuaciones, el sistema (**??**) tiene solución, si para $\vec{P}$, si existe una matriz $\mathbf{A}^{-1}$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}\vec{P'} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\vec{P} + \mathbf{A}^{-1}b \\ &= \vec{P} + \mathbf{A}^{-1}b \end{aligned}$$

esto es

$$\vec{P} = \mathbf{A}^{-1}\vec{x'} - \mathbf{A}^{-1}b \tag{6}$$

y esta es la idea de pasar un sistema de referencia a otro, podemos observar al punto P en términos de P' o bien, P' en términos de P, interpretar los sistemas de referencia.

3 Transformando un triángulo en otro

El problema ahora, es transformas un triángulo $\triangle P_1'P_2'P_3'$ al triángulo $\triangle P_1'', P_2'', P_3''$ que como se representa en la figura de abajo mediante una transformación lineal

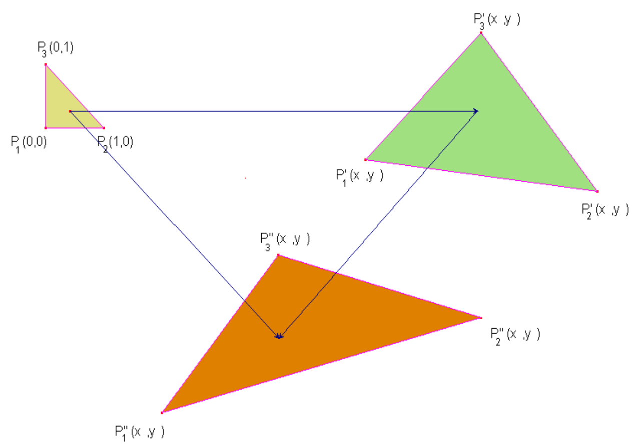

Figura 2: Transformando un triángulo en otro.

La idea detrás de este problema es sencilla. Hasta el momento sabemos como transforma el triángulo $\triangle P_1(0,0)P_1(1,0)P_2(0,1)$ a cualquier triángulo dado por (**??**–**??**), usemos esto (**??**) y la inversa de esta transformación, aquella que transforma cualquier triángulo en $\triangle P_1(0,0)P_1(1,0)P_2(0,1)$ dada por (**??**). Veamos como usarlo.

4 Ejercicio numérico

Encuentre la transformación lineal entre el triángulo $\triangle P_1'(1,2)P_2'(5,3)P_3'(2,7)$ y el triángulo $\triangle P_1''(2,-4), P_2''(5,-3)P_3''(1,-1)$.

Siguiendo el procedimiento anterior, podemos describir el mapeo de $\triangle P_1(0,0)P_1(1,0)P_2(0,1)$ hacia $\triangle P_1'(1,2)P_2'(5,3)P_3'(2,7)$ en la forma:

$$\begin{aligned} x' &= (5-1)x + (2-1)y + 1 \\ &= 4x + y + 1 \\ y' &= (3-2)x + (7-2)y + 2 \\ y' &= x + 5y + 2 \end{aligned} \tag{7}$$

De igual forma, podemos describir el mapeo de $\triangle P_1(0,0)P_1(1,0)P_2(0,1)$ hacia $\triangle P_1''(2,-4), P_2''(5,-3)P''(1,-$
en la forma:

$$\begin{aligned} x'' &= (5-2)x + (1-2)y + 2 \\ &= 3x - y + 2 \\ y'' &= (-3+4)x + (-1+4)y - 4 \\ &= x + 3y - 4 \end{aligned} \tag{8}$$

Si resolvemos (**??**) para (x, y) tenemos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{19}(5x' - y' - 3) \\ y &= \frac{1}{19}(4y' - x' - 7) \end{aligned} \tag{9}$$

sustituyendo este resultado en (**??**), tenemos

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{3}{19}(5x' - y' - 3) - \frac{1}{19}(4y' - x' - 7) + 2 \\ y'' &= \frac{1}{19}(5x' - y' - 3) + \frac{3}{19}(4y' - x' - 7) - 4 \end{aligned} \tag{10}$$

Lo cual simplificando tenemos

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{16}{19}x' - \frac{7}{19}y' + \frac{36}{19} \\ y'' &= \frac{2}{19}x' + \frac{11}{19}y' + \frac{100}{19} \end{aligned}$$

Su trabajo para mañana 10 de febrero es realizar este ejercicio en forma matricial.