Geometría Analítica I

TRABAJO 9

Profesor: Pablo Barrera — Día sábado 5, septiembre, 2015

Intersección entre segmentos

En el plano, dado dos segmentos, no siempre se intersectan. Pero si consideremos a esos segmentos como parte de rectas, podemos identificar el punto de intersección y a través de la forma parametrizada de los segmentos identificar si el punto de intersección está fuera de lo segmentos o dentro de alguno.

Veamos algunos ejercicios numéricos antes de señalar una forma analítica de resolver el problema.

Problema: Considere los puntos $A(2,1)$, $B(11,-1)$, $C(0,4)$ y $D(7,5)$, muestre si los segmentos $\bar{AB}$ y $\bar{CD}$ se intersectan y en donde.

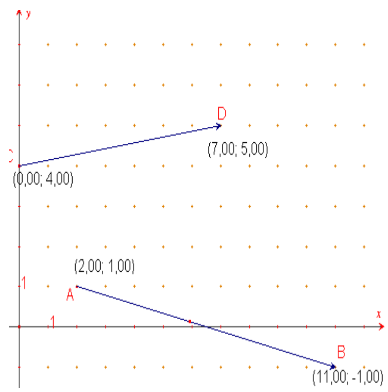

Figura 1: Dos segmentos en el plano.

aparentemente esos segmentos no se cortan. Cómo podemos mostrar que eso ocurre?

Consideremos una representación de los segmentos, para el segmento $\bar{AB}$ tenemos

$$\vec{OP}(t) = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}, \tag{1}$$

de manera similar,

$$\vec{OQ}(s) = (1-s)\vec{OC} + s\vec{OD}, \tag{2}$$

no es la única forma de escribirlo, pero por convención en el orden de las letras usaremos esa.

La ecuación (1) puede ser escrita como

$$\begin{aligned}\vec{OP}(t) &= (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB} \\ &= \vec{OA} + t(\vec{OB} - \vec{OA}) \\ &= \vec{OA} + t\vec{u} \\ &= (2,1) + t(9,-2) \qquad (3)\end{aligned}$$

de manera similar,

$$
\begin{aligned}
\vec{OQ}(s) &= (1-s)\vec{OC} + s\vec{OC} \\
&= \vec{OC} + s(\vec{OD} - \vec{OC}) \\
&= \vec{OC} + s\vec{v} \\
&= (0,4) + s(7,1) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Como buscamos el punto de intersección igualamos la representación (3) con (4), tenemos

$$(2,1) + t(9,-2) = (0,4) + s(7,1) \qquad (5)$$

simplificando

$$(2+9t, 1-2t) = (7s, 4+s)$$

Esto nos conduce a un sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
2+9t &= 7s \\
1-2t &= 4+s
\end{aligned}
$$

resolviendo el sistema tenemos que $t^* = -1$ y $s = -1$, y al evaluar s^* o t^* en la representación las rectas (ya sea en la 3 o en la ecuación 4), tenemos que el punto de intersección es $P(-7,3)$.

Observe que tanto t^* y s^* son negativos, esto que significa que el punto $P(t^*)$ se encuentra fuera del segmento $\bar{AB}$, digamos que a la "izquierda" de A, esto es, que el vector $\vec{AP}$ se encuentra en dirección contraria al vector $\vec{AB}$. De manera similar, $Q(s^*)$ se encuentra a la "izquierda" de C, esto es que el vector $\vec{CQ}$ está en dirección contraria a $\vec{v} = \vec{CD}$.

Problema 1: Considere los puntos $A(-2,2)$, $B(11,2)$, $C(6,-3)$ y $D(2,5)$, muestre si los segmentos $\bar{AB}$ y $\bar{CD}$ se intersectan y en donde.

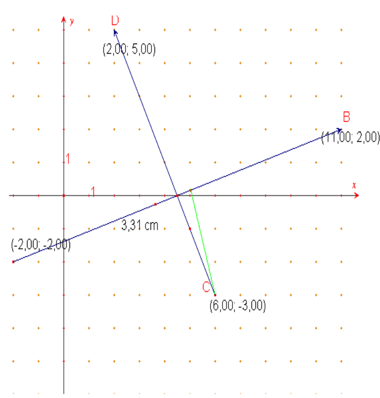

Figura 2: Dos segmentos en el plano.

Problema 2: Determine un punto P que parte al segmento dirigido $\overline{AB}$ formado por los puntos $A(2,3)$, $B(5,-1)$ en la razón

1. $r = 1.3$
2. $r = .2$
3. $r = -.3$

cuando se habla de segmento dirigido es pues eso, que en la dirección se indica se considera positiva y hacia la otra se considera negativa.

En clase hemos visto o revisado, que la razón en que un punto P parte a un segmento $\overline{AB}$ se escribe como

$$\frac{AP}{PB} = r$$

aquí la notación AP significa la longitud del segmento $\overline{AP}$.

Tip: El punto P está sobre la recta que conecta A con B, describa la recta usando el hecho de que

$$\vec{AP} \parallel \vec{PB}$$

Fecha de entrega: Martes 8, septiembre de 2015.