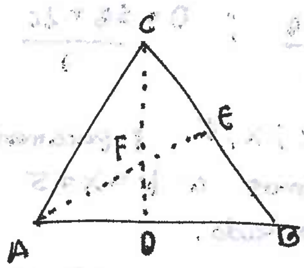
GEOMETRIA ANALITICA I

Prof. Pablo Barrera
Rafael Fernando Olmedo Aguilar

Problema 1. Si D es el punto medio del lado AB del triangulo ABC△ y si además $EB = 2CE$ demuestre que F es el punto medio del segmento CD.

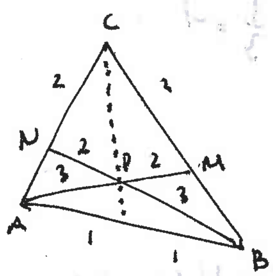


Tenemos que D parte al segmento AB en la razon 1:1 y E parte al segmento BC en la razon 2:1

Calculando las masas de los puntos C y D, y encontramos que $m_C = 2K$ por la razon que divide al seg. BC en 2:1 y $m_D = 2K$ => El punto F esta dado por:

$F = \frac{2KC + 2KD}{4K} = \frac{2C + 2D}{4} = \frac{C+D}{2}$ donde F divide al segmento CD en la razón 1:1. ■

Problema 2. Demuestren que los segmentos que parten desde dos vertices de un triangulo y trisectan los lados opuestos como se ve en la figura, se intersectan en el punto P tal que se dividen en la relacion 3 a 2.



Sabemos que $m_A = 2$, $m_B = 2$ y que los segmentos AM y BN trisectan BC y AC respectivamente por lo tanto $m_C = 1$ =>

$P = \frac{2A + 2B + C}{5}$ despejando tenemos:

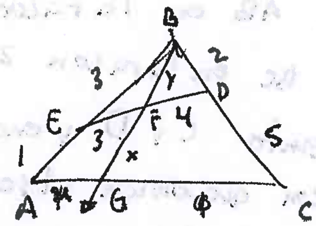
$5P - 2A = 2B + C$ Pero sabemos que $M = \frac{2B+C}{3}$ entonces dividimos entre tres. $\frac{5P + 2A}{3} = \frac{2B+C}{3} = M$. Por lo tanto $M = \frac{5P - 2A}{3}$ despejando a P

tenemos $P = \frac{3M + 2A}{5}$. De la misma manera para N.

Tenemos que $P = \frac{2A + 2B + C}{5}$ => $\frac{5P - 2A}{3} = \frac{2B + C}{3} = N$

Por lo tanto $N = \frac{5P - 2B}{3}$ despejando P tenemos que $P = \frac{3N + 2B}{5}$ ■

Problema 3. En el triangulo $\triangle ABC$ sea E sobre AB de manera que $AE:EB=1:3$. Sea D sobre BC de manera que $BD:DC=2:5$ y sea F sobre ED de manera que $EF:FD=3:4$. Finalmente, el rayo BF intersecta AC en el punto G. Calcule $AG:GC$ y $BF:FG$.



Tenemos: $F=\dfrac{4E+3D}{7}$; $E=\dfrac{3A+B}{4}$; $D=\dfrac{5B+2C}{7}$

Tenemos que m_B está dado por $k;x;5$ y para mantener la igualdad de las mas hacemos a $k=x=5$ y tenemos $m_B=5$ para cualquier lado.

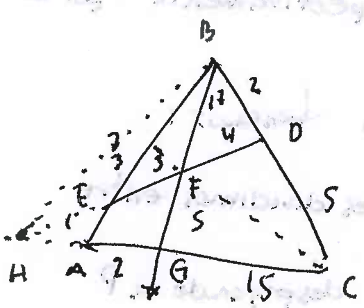
Tenemos que $m_A=3k=\varphi$ pero ya habíamos hecho $k=5 \Rightarrow m_A=15=\varphi$ donde $\varphi=15$ para mantener la $m_A=15$ en ambos lados.

Tenemos $m_C=2;\psi \Rightarrow \psi=2$ para mantener la $m_C=2$ para ambos lados.

▶ Sabemos por el teorema de Menelao que

$$\frac{CD}{DB}\cdot\frac{CH}{HA}\cdot\frac{AE}{EB}=-1 \quad \text{entonces} \quad \frac{2}{5}\cdot\frac{CH}{HA}\cdot\frac{1}{3}=-1$$

donde $\dfrac{CH}{HA}=-\dfrac{15}{2}$



y también sabemos que G y H son conjugados armónicos con respecto a A y C entonces

$$\frac{CG}{GA}=-\frac{CH}{HA}$$

Por lo tanto $\dfrac{CG}{GA}=\dfrac{15}{2}$

entonces $AG:GC=15:2$

Por otro sabemos que $F=\dfrac{15H+5B+2C}{22}$ H tiene $m_H=15$ y $G=\dfrac{15H+2C}{17}$

Por lo tanto $F=\dfrac{15H+5B+2C}{2}$ $\quad \dfrac{22F-5B}{17}=\dfrac{15H+2C}{17}=G$ ent. $G=\dfrac{22F-5B}{17}$

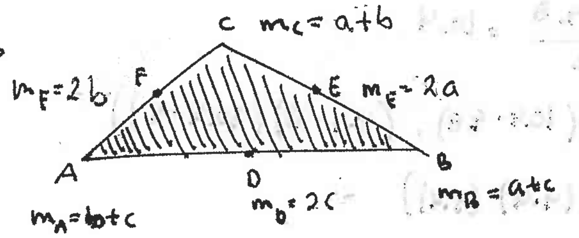
donde $F=\dfrac{17G+5B}{22}$ Por lo tanto $BF:FG=17:5$

Geometria Analitica 1.

Prof. Pablo Barrera

Problema 4: Muestra que si el triangulo ΔABC le asignamos las masas $m_A = b+c$, $m_B = a+c$ y $m_c = a+b$ estas se pueden remplazar por las masas $2a, 2b, 2c$ colocandolas en los puntos medios a, b y c.

▷ Supongamos que existe un triangulo ΔABC y $m_A = b+c$; $m_B = a+c$; $m_c = a+b$

=> 

Entonces las coordenadas del punto o centro de gravedad esta dado por:

$$P(\varphi, \psi) = \frac{m_A A + m_B B + m_c C}{m_A + m_B + m_c} \quad \text{pero}$$

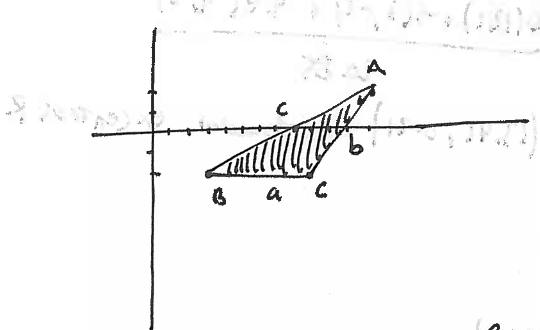
esto se puede ver de la forma: $P(\varphi, \psi) = \dfrac{(b+c)A + (a+c)B + (a+b)C}{2a+2b+2c}$; distribuyendo y

asociando terminos tenemos: $P(\varphi, \psi) = \dfrac{a(B+C) + b(A+C) + c(A+B)}{2a+2b+2c}$; multiplicando

por uno el numerador: $P(\varphi, \psi) \dfrac{2a\left(\frac{B+C}{2}\right) + 2b\left(\frac{A+C}{2}\right) + 2c\left(\frac{A+B}{2}\right)}{2a+2b+2c}$ y se

ve "a ojito" que que colocando masas igual a $2a; 2b; 2c$ en el punto medio de los segmentos se conserva la igualdad. ■

Problema 5. Para el triangulo ΔABC con $A(12,2)$, $B(3,-2)$ y $C(9,-2)$, Calcule los excentros, el radio de los excentros, el incentro, y el radio del circulo inscrito, el punto de Nagel y el punto de Georgonne.



Incentro Def. de incentro (a,b,c) es decir

$$I = \frac{aA + bB + cC}{a+b+c}$$ tenemos que a, b y c son las magnitudes de los vectores $\vec{BC}$; $\vec{CA}$ y $\vec{AB}$ resp.

$\vec{AB} = (3,-2) - (12,2) = (-9,-4) \Rightarrow \|\vec{AB}\| = c = 9.8$

$\vec{BC} = (9,-2) - (3,-2) = (6,0) \Rightarrow \|\vec{BC}\| = a = 6$

$CA = \vec{CA} = (12,2) - (9,-2) = (3,4) \Rightarrow \|\vec{CA}\| = b = 5$

Sustituyemos tenemos: $I = \dfrac{6(12,2) + 5(3,-2) + 9.8(9,-2)}{20.8}$ resolviendo

tenemos $I = (8.42, -0.84)$ incentro.

Para calcular el punto de Georgonne tenemos que:

$$G = ((s-b)(s-c), (s-a)(s-c), (s-a)(s-b))$$

donde $s = \dfrac{a+b+c}{2} \Rightarrow \dfrac{6+5+9.8}{2} = 10.4$

$$\Rightarrow G = ((10.4-5)(10.4-9.8), (10.4-6)(10.4-9.8), (10.4-6)(10.4-5))$$

$$= ((5.4)(0.55), (4.4)(0.55), (4.4)(5.4))$$

$$= (2.97, 2.42, 23.76) = (m_A, m_B, m_C)$$

$$= \frac{2.97A + 2.42B + 23.76C}{29.15} = (8.8, -1.5) \rightarrow$$ Coordenadas del punto de Georgonne

Para el punto de Nagel tenemos $N_a = (s-a, s-b, s-c)$ donde $s = 10.4$

Baricentricas

entonces $N_a = (10.4-6, 10.4-5, 10.4-9.8) = (4.4, 5.4, 0.6)$

Baricentro

entonces $N_a = \dfrac{4.4(12,2) + 5.4(3,-2) + 0.6(9,-2)}{10.4}$

$N_a = (7.1, -0.3)$. Coordenadas del punto de Nagel.

Excentros:

W tangente a $\overline{BC}$

tenemos $W = (-a, b, c)$

entonces $W = \dfrac{-6(12,2) + 5(3,-2) + 9.8(9,-2)}{8.83}$

$\Rightarrow W = (3.5, -4.7)$ coordenadas excentro W.

R tangente a $\overline{AC}$

$R = (a, -b, c)$

entonces $R = \dfrac{6(12,2) - 5(3,-2) + 9.8(9,-2)}{10.85}$

$R = (13.42, 0.21)$ coordenadas excentros R

J tangente a $\overline{CA}$

$J = (a, b, -c)$

$J = \dfrac{6(12,2) + 5(3,-2) - 9.8(9,-2)}{1.15}$

$J = (-1.43, 18.8)$ coordenadas excentro J.

Radios de los excirculos

Buscaremos la recta de la prolongacion de un lado que toque cada excirculo y calculamo su ortogonal para despues encontra interseccion y all magnitud del vector.

Radio W

Recta $\overline{AB} = (4,-9)((x,y)-(3,-2)) = 0$

$(4,-9)(x-3, y+2) = 0$

$4x - 12 - 9y - 18 = 0$

$4x - 9y - 30 = 0 \} 1$

Ortogonal que pasa por W

$(-9,-4) \cdot ((x,y) - (3.5, -4.7)) = 0$

$(-9,-4) \cdot (x-3.5, y+4.7) = 0$

$-9x + 31.5 - 4y - 18.8 = 0$

$9x + 4y - 12.7 = 0 \} 2$

Intersectando las rectas 1 y 2 tenemos el punto $N = (2.43, -2.25)$

Ahora calculamos un vector $\overrightarrow{WN} = (2.43, -2.25) - (3.5, -4.7) = (-1.07, 2.45)$

$\|\overrightarrow{WN}\| = 2.6\ u$ radio del excirculo W.

Radio excirculo R. ortogonal que pasa por R.

$(6,0)((x,y) - (13.42, 0.21)) = 0$

$(6,0)(x - 13.42, y - 0.21) = 0$

$6x - 80.52 = 0 \Rightarrow x = \frac{80.52}{6} = 13.42$

La recta $\overline{BC}$ es $y = -2$

Intersectando obtenemos $M = (13.42, -2)$

y calculamos el vector $\overrightarrow{RM} = M - R$

$= (13.42, -2) - (13.42, 0.21) = (0, -2.21)$ Ahora $\|\overrightarrow{RM}\| = 2.21\ u$ Radio del excirculo R

Radio de J.

Ortogonal por J

$(6,0)((x,y) - (-1.43, 18.8)) = 0$

$(6,0)(x + 1.43, y - 18.8) = 0$

$6x + 8.58 = 0 \Rightarrow x = -\frac{8.58}{6} = -1.43$

La recta $\overline{BC}$ esta dada por $y = -2$

intersectando encontramos el punto

$L(-1.43, -2)$

Ahora $\overrightarrow{JL} = (-1.43, -2) - (-1.43, 18.8) = (0, -20.8)$

y bien $\|\overrightarrow{JL}\| = 20.28\ u \rightarrow$ Radio de L.

Radio del circulo inscrito

Incentro $= (8.42, -0.84)$ Debido a que $\overline{BC}$ es una recta $y = -2$ podemos calcular el radio del circulo inscrito con la dif. de ordenadas. $-0.84 + 2 = 1.19 \}$ radio de circ. inscrito.