Geometria Analitica I

Trabajo 17

Rafael Fernando Olmedo Aguilar.

Prof. Pablo Barrera.

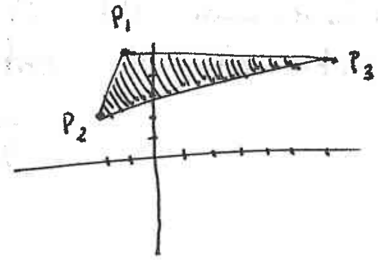
Problema 1. Tienen el triangulo formado $P_1(-1,5)$, $P_2(-2,2)$ y $P_3(6,5)$.
Si asociamos a cada punto las masas m_1, m_2, m_3 respectivamente, calcule el punto de equilibrio.

1. P si usamos $m_1 = 2$, $m_2 = 2$ $m_3 = 3$.

$\vec{R}, \vec{Q}, \vec{P} = (m_1 P_1 + m_2 P_2 + m_3 P_3) \cdot \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3}$ ▸ Utilizamos esta definicion para calcular el punto de equilibrio.

$\Rightarrow \vec{P} = [2(-1,5) + 2(-2,2) + 3(6,5)] \cdot \frac{1}{7}$

$\vec{P} = (-2 - 4 + 18, 10 + 4 + 15) \cdot \frac{1}{7} = \left(\frac{12}{7}, \frac{29}{7}\right)$



= 2. Q si usamos $m_1 = -1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 5$

$\Rightarrow Q = [-1(-1,5) + 2(-2,2) + 5(6,5)] \cdot \frac{1}{6}$

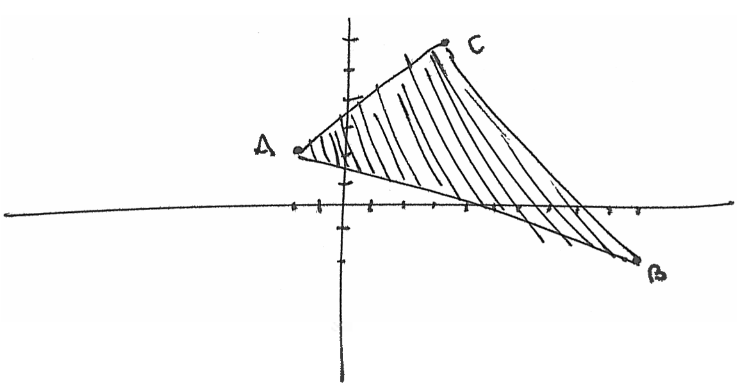
$= (1 - 4 + 30, -5 + 4 + 25) \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{27}{6}, \frac{24}{6}\right)$

3. R si usamos $m_1 = -1$, $m_2 = 5$, $m_3 = -3$

$R = [-1(-1,5) + 5(-2,2) - 3(6,5)] \cdot 1$

$R = (1 - 10 - 18, -5 + 10 - 15) = (-27, -10)$

Problema 2. Tienen el triangulo formado por $A(-2,2)$, $B(10,-2)$ y $C(3,6)$.
El punto P_{AB} divide al segmento $\overline{AB}$ en la razon 1:3. Sobre la ceviana $\overline{CP_{AB}}$ colocamos un punto G que la divide en la razon 1:3. Calcule las coordenadas baricentricas de G y calcule el punto.



Como la razon en la que divide el punto P_{AB} al segmento $\overline{AB}$ es 1:3
$\Rightarrow$ asignamos la masa $m_A = 3$ y $m_B = 1$ para los puntos A y B respectivamente
Ahora aplicando la definición de punto de equilibrio:

$$\vec{P}_{AB} = \frac{m_A A + m_B B}{m_A + m_B} = \frac{3(-2,2) + 1(10,-2)}{4}$$

$$= \left(\frac{-6+10}{4}, \frac{6-2}{4}\right) = (1,1)$$

De la misma manera Para el segmento $\overline{CP_{AB}}$, el punto G divide a ese segmento en la relacion 1:3 $\Rightarrow$ Asignamos $m_{P_{AB}} = 1$ y $m_C = 3$ y aplicamos de nuevo la definición de punto de equilibrio para el punto G.

$$\vec{g} = \frac{m_{P_{AB}} \cdot P_{AB} + m_C \cdot C}{m_{P_{AB}} + m_C} = \frac{1(1,1) + 3(3,6)}{4}$$

$$= \left(\frac{1+9}{4}, \frac{1+18}{4}\right) = \left(\frac{10}{4}, \frac{19}{4}\right)$$

las coordenadas baricéntricas se pueden ver de la forma $B(m_A, m_B, m_C)$
$\Rightarrow$ $B(3,1,3)(K)$.

Ahora sobre la ceviana $\overline{CP_{AB}}$ hay un punto F que divide al segmento en la razon 1:1. Calcule sus coordenadas Baricentricas y el punto F.
Tenemos que la razon es 1:1 $\Rightarrow$ $m_{P_{AB}} = 1$ y $m_C = 1$; Ahora por definición:

$$F = \frac{m_{P_{AB}} \cdot P_{AB} + m_C \cdot C}{m_{P_{AB}} + m_C} = \frac{(1,1) + (3,6)}{2} = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{1+6}{2}\right) = \left(2, \frac{7}{2}\right)$$

finalmente las coordenadas baricentricas serian $B_1(3,1,1)(K)$.

Problema 3. Para el triangulo formado por $P(7,6)$, $Q(2,2)$ y $R(12,1)$ calcule las masas asociadas a esos puntos para que:

1. $A(6,3)$ se encuentre en equilibrio. Asociamos una masa para cada punto.

$$A = \frac{m_1 P + m_2 Q + m_3 R}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$A = \alpha P + \beta Q + \gamma R$ donde $\alpha + \beta + \gamma = 1$ ya que

$$\alpha = \frac{m_1}{m_1+m_2+m_3} ; \beta = \frac{m_2}{m_1+m_2+m_3} \text{ y } \gamma = \frac{m_3}{m_1+m_2+m_3}$$

$$(6,3) = \alpha(7,6) + \beta(2,2) + \gamma(12,1)$$

$$6 = 7\alpha + 2\beta + 12\gamma$$
$$3 = 6\alpha + 2\beta + \gamma$$

Despejando $\gamma = 1 - \alpha - \beta$ y sustituimos para dejar en terminos de dos variables.

$$6 = 7\alpha + 2\beta + 12 - 12\alpha - 12\beta$$
$$3 = 6\alpha + 2\beta + 1 - \alpha - \beta$$

$$\Rightarrow \quad 5\alpha + 10\beta = 6$$
$$5\alpha + \beta = 2$$

Resolviendo el sistema tenemos $\alpha = \frac{14}{45}$; $\beta = \frac{20}{45}$; $\gamma = \frac{11}{45}$

$\Rightarrow$ $m_1 = 14$; $m_2 = 20$; $m_3 = 11$. Las masas se pueden multiplicar por un $k \in \mathbb{N}$. y seguira en equilibrio el punto.

2. $B(4,0)$ Aplicando el mismo metodo

$$(4,0) = \alpha(7,6) + \beta(2,2) + \gamma(12,1)$$

$$4 = 7\alpha + 2\beta + 12\gamma$$
$$0 = 6\alpha + 2\beta + \gamma$$

pero $\gamma = 1 - \alpha - \beta$

$$\Rightarrow \quad 4 = 7\alpha + 2\beta + 12 - 12\alpha - 12\beta$$
$$0 = 6\alpha + 2\beta + 1 - \alpha - \beta$$

Reduciendo tenemos:

$$5\alpha + 10\beta = 8$$
$$5\alpha + \beta = -1$$

Resolviendo tenemos $\alpha = \frac{-18}{45}$; $\beta = \frac{45}{45}$ $\gamma = \frac{18}{45}$

$\Rightarrow$ $m_1 = -18$; $m_2 = 45$; $m_3 = 18$ y por un k ya que multiplos de un mismo factor no cambian el equilibrio en $B(4,0)$.