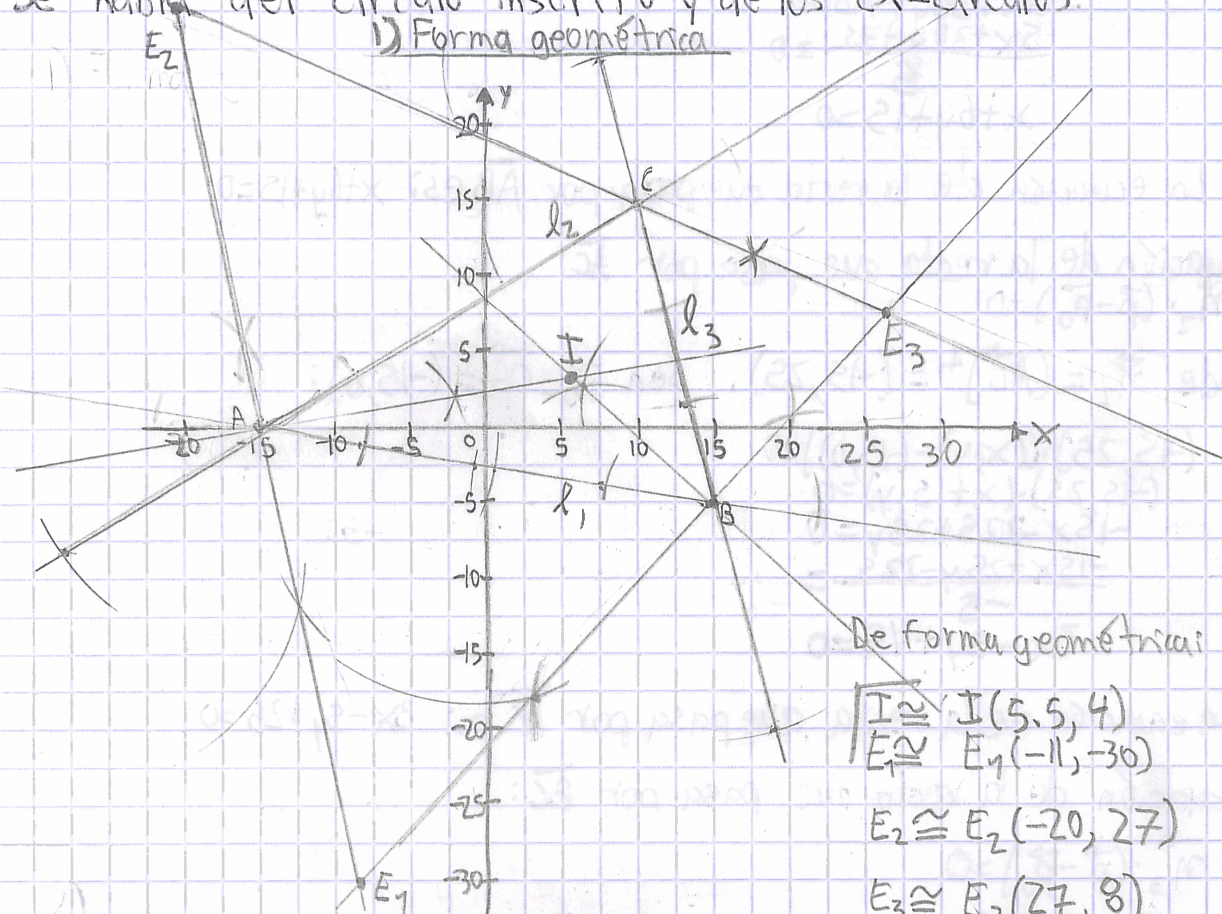
Alcantar Martínez Jesús

Trabajo 16

Calcule en forma geométrica y analítica los centros de los círculos tangentes al triángulo formado por $A(-15,0)$, $B(15,-5)$ y $C(10,15)$.

Se habla del círculo inscrito y de los ex-círculos.

1) Forma geométrica



De forma geométrica:

$I \cong I(5.5, 4)$

$E_1 \cong E_1(-11, -30)$

$E_2 \cong E_2(-20, 27)$

$E_3 \cong E_3(27, 8)$

2) Forma analítica:

Para hallar la ecuación de las bisectrices internas y externas necesitamos la ecuación de la recta que pasa por $\overline{AB}$, por $\overline{AC}$ y por $\overline{BC}$:

Sabemos que: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (15,-5)-(-15,0) = (30,-5)$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (10,15)-(-15,0) = (25,15)$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (10,15)-(15,-5) = (-5,20)$

Entonces:

- Ecuación de la recta que pasa por $\overline{AB}$:

$\vec{\eta}_1 \cdot (\vec{p} - \vec{p}_0) = 0$

Donde $\vec{n}_1 = (\overrightarrow{AB})^{\perp} = (5,30)$; y $\vec{p}_0 = \overrightarrow{OA} = (-15,0)$:

$$(5,30)\cdot((x,y)-(-15,0))=0$$
$$(5,30)\cdot(x+15,y)=0$$
$$5x+75+30y=0$$
$$5x+30y+75=0$$
$$\frac{5x+30y+75}{5}=0$$
$$x+6y+15=0$$

$\therefore$ La ecuación de la recta que pasa por $\overline{AB}$ es: $x+6y+15=0$

- Ecuación de la recta que pasa por $\overline{AC}$:

$$\vec{n}_2\cdot(\vec{p}-\vec{p}_0)=0$$

Dondé $\vec{n}_2 = (\overrightarrow{AC})^{\perp} = (-15,25)$. Sea $\vec{p}_0 = \overrightarrow{OA} = (-15,0)$:

$$(-15,25)\cdot((x,y)-(-15,0))=0$$
$$(-15,25)\cdot(x+15,y)=0$$
$$-15x-225+25y=0$$
$$\frac{-15x+25y-225}{-5}=$$
$$3x-5y+45=0$$

$\therefore$ La ecuación de la recta que pasa por $\overline{AC}$ es: $3x-5y+25=0$

- Ecuación de la recta que pasa por $\overline{BC}$

$$\vec{n}_3\cdot(\vec{p}-\vec{p}_0)=0$$

Donde $\vec{n}_3 = (\overrightarrow{BC})^{\perp} = (20,5)$. Sea $\vec{p}_0 = \overrightarrow{OB} = (15,-5)$:

$$(20,5)\cdot((x,y)-(15,-5))=0$$
$$(20,5)\cdot(x-15,y+5)=0$$
$$20x-300+5y+25=0$$
$$20x+5y-275=0$$
$$\frac{20x+5y-275}{5}=0$$
$$4x+y-55=0$$

$\therefore$ La ecuación de la recta que pasa por $\overline{BC}$ es: $4x+y-55=0$

Luego:

• Incentro

Para calcular el incentro basta con calcular el punto de intersección de dos bisectrices internas:

- Bisectriz interna del ángulo en A:

Sabemos que, por definición de bisectriz:

$$\frac{\vec{\eta}_1 \cdot (\vec{p}-\vec{p}_0)}{\|\vec{\eta}_1\|} = \frac{\vec{\eta}_2 \cdot (\vec{p}-\vec{p}_0)}{\|\vec{\eta}_2\|}$$

Necesitamos la ecuación de la recta que pasa por $\overline{AB}$, y por $\overline{AC}$:

Por $\overline{AB}$: ℓ_1: $x+6y+15=0$, con $\eta_1=(1,6)$

Por $\overline{AC}$: ℓ_2: $3x-5y+45=0$, con $\eta_2=(3,-5)$

Luego: Sea el punto $S(0,0)$:

En ℓ_1: $0+6(0)+15=15>0$

En ℓ_2: $3(0)-5(0)+45=25>0$

$d(Q,\ell_1)$, $d(Q,\ell_2)$ $\Rightarrow d(Q,\ell_1)=d(Q,\ell_2)$

Entonces, aplicando la definición de bisectriz:

$$\frac{x+6y+15}{\sqrt{1^2+6^2}} = \frac{3x-5y+45}{\sqrt{3^2+(-5)^2}}$$

$$\frac{x+6y+5}{\sqrt{37}} = \frac{3x-5y+45}{\sqrt{34}}$$

$$(\sqrt{34})(x+6y+5)=(\sqrt{37})(3x-5y+45)$$

$$\cong \sqrt{34}x+6\sqrt{34}y+5\sqrt{34}=3\sqrt{37}x-5\sqrt{37}y+45\sqrt{37}$$

$$\sqrt{34}x+6\sqrt{34}y+5\sqrt{34}-3\sqrt{37}x+5\sqrt{37}y-45\sqrt{37}=0$$

$$(\sqrt{34}-3\sqrt{37})x+(6\sqrt{34}+5\sqrt{37})y+(5\sqrt{34}-45\sqrt{37})=0$$

$$\cong (5.83095-18.24829)x+(34.98571+30.41381)y+(29.15476-273.72431)=0$$

$$\cong \frac{-12.41734x+65.39952y-244.56955}{-12.41734}=\frac{0}{-12.41734}$$

$$\cong x-5.2668y+19.6958=0 \ldots ①$$

∴ La ecuación de la bisectriz interna en A es: $x-5.2668y+19.6958=0$

- Bisectriz interna del ángulo en B:

Para poder calcular la bisectriz interna del ángulo en B necesitamos la ecuación de la recta que pasa por $\overline{AB}$, y por $\overline{BC}$:

Por $\overline{AB}$: l_1: $x+6y+15=0$, con $n_1=(1,6)$
Por $\overline{BC}$: l_3: $4x+y-55=0$, con $n_3=(4,1)$

Luego, sea el punto $S(0,0)$:

En l_1: $0+6(0)+15=15>0 \Rightarrow d(Q,l_1)$
En l_3: $4(0)+0-55=-55<0 \Rightarrow -d(Q,l_3)$ $\Rightarrow d(Q,l_1)=-d(Q,l_3)$

Entonces, aplicando la definición de bisectriz:

$$\frac{x+6y+15}{\sqrt{1^2+6^2}}=-\frac{4x+y-55}{\sqrt{4^2+1^2}}$$
$$\frac{x+6y+15}{\sqrt{37}}=\frac{-4x-y+55}{\sqrt{17}}$$
$$(\sqrt{17})(x+6y+15)=(\sqrt{37})(-4x-y+55)$$
$$\sqrt{17}x+6\sqrt{17}y+15\sqrt{17}=-4\sqrt{37}x-\sqrt{37}y+55\sqrt{37}$$
$$\sqrt{17}x+6\sqrt{17}y+15\sqrt{17}+4\sqrt{37}x+\sqrt{37}y-55\sqrt{37}=0$$
$$(\sqrt{17}+4\sqrt{37})x+(6\sqrt{17}+\sqrt{37})y+(15\sqrt{17}-55\sqrt{37})=0$$
$$\cong \frac{28.4542x+30.8214y-272.7054}{28.4542}=\frac{0}{28.4542}$$
$$\cong x+1.0832y-11.1517=0 \;\ldots\; ②$$

$\therefore$ La ecuación de la bisectriz interna en B es: $x+1.0832y-11.1517=0$

Después, de ① y ② obtenemos:

$$\begin{cases} x-5.2668y+19.6958=0 \;\ldots\; ①^* \\ x+1.0832y-11.1517=0 \;\ldots\; ②^* \end{cases}$$

$①^*-②^*$:

$$\begin{array}{r} x-5.2668y+19.6958=0 \\ -(x+1.0832y-11.1517=0) \\ \hline -6.3500y+30.8475=0 \Rightarrow \end{array}$$
$$y=\frac{-30.8475}{-6.3500}\cong 4.8579$$

En $①^*$: $x-5.2668(4.8579)+19.6958=0$
$$x-25.5856+19.6958=0$$
$$x-5.8898=0$$
$$x\cong 5.8898$$

Sea I el incentro entonces $I(5.89, 4.86)$.
$\therefore$ Las coordenadas del incentro son: $I(5.89, 4.86)$.

• Centro de los excírculos:

Para hallar el centro de los excírculos, necesitamos la ecuación de la recta que pasa por $\overline{AB}$, por $\overline{BC}$, por $\overline{AC}$: Del ejercicio anterior tenemos que:

Por $\overline{AB}$: $\ell_1: x+6y+15=0$, con $\eta_1=(1,6)$
Por $\overline{AC}$: $\ell_2: 3x-5y+25=0$, con $\eta_2=(3,-5)$
Por $\overline{BC}$: $\ell_3: 4x+y-55=0$, con $\eta_3=(4,1)$

Luego debemos hallar la ecuación de las bisectrices externas del ángulo en cada punto:

· Bisectriz externa en A:

Como en el ejercicio anterior, para calcular la bisectriz interna fue: $d(Q,\ell_1)=d(Q,\ell_2)$, para la externa es: $d(Q,\ell_1)=-d(Q,\ell_2)$:

$$\frac{x+6y+15}{\sqrt{1^2+6^2}}=-\frac{3x-5y+45}{\sqrt{3^2+(-5)^2}}$$

$$\frac{x+6y+15}{\sqrt{37}}=\frac{-3x+5y-45}{\sqrt{34}}$$

$$(\sqrt{34})(x+6y+15)=(\sqrt{37})(-3x+5y-45)$$

$$\sqrt{34}x+6\sqrt{34}y+15\sqrt{34}=-3\sqrt{37}x+5\sqrt{37}y-45\sqrt{37}$$

$$(\sqrt{34}+3\sqrt{37})x+(6\sqrt{34}-5\sqrt{37})y+(15\sqrt{34}+45\sqrt{37})=0$$

$$\cong \frac{24.0792x+4.5719y+361.1886}{24.0792}=\frac{0}{24.0792}$$

$$x+0.1899y+15=0 \quad \ldots 1)$$

$\therefore$ La bisectriz externa en A es: $\cong x+0.1899y+15=0$

· Bisectriz externa en B:

Como en el ejercicio anterior, para la bisectriz interna fue: $d(Q,\ell_1)=-d(Q,\ell_3)$ usaremos: $d(Q,\ell_1)=d(Q,\ell_3)$:

$$\frac{x+6y+15}{\sqrt{1^2+6^2}}=\frac{4x+y-55}{\sqrt{4^2+1^2}}$$

$$\frac{x+6y+15}{\sqrt{37}}=\frac{4x+y-55}{\sqrt{17}}$$

$$(\sqrt{17})(x+6y+15)=(\sqrt{37})(4x+y-55)$$

$$\sqrt{17}x+6\sqrt{17}y+15\sqrt{17}=4\sqrt{37}x+\sqrt{37}y-55\sqrt{37}$$

$$0=(4\sqrt{37}-\sqrt{17})x+(\sqrt{37}-6\sqrt{17})y+(-55\sqrt{37}-15\sqrt{17})$$

$$\cong \frac{20.2079x-18.6559y-396.3985}{20.2079}=\frac{0}{20.2079}$$

$$x-0.9232y-19.616=0 \quad \ldots 2)$$

$\therefore$ La ecuación de la bisectriz externa en B es: $\cong x-0.9232y-19.616=0$

• Bisectriz externa en C:

Sean: $l_2: 3x-5y+25=0$, con $\eta_1=(3,-5)$

$l_3: 4x+y-55=0$, con $\eta_3=(4,1)$

Sea el punto $S(20,0)$.

En l_2: $3(20)-5(0)+25=85>0 \Rightarrow d(Q,l_2)$

En l_3: $4(20)+0-55=25>0 \Rightarrow d(Q,l_3)$ $\Rightarrow d(Q,l_2)=d(Q,l_3)$

Entonces: $\dfrac{3x-5y+45}{\sqrt{3^2+(-5)^2}}=\dfrac{4x+y-55}{\sqrt{4^2+1^2}}$

$$\frac{3x-5y+45}{\sqrt{34}}=\frac{4x+y-55}{\sqrt{17}}$$

$$(\sqrt{17})(3x-5y+45)=(\sqrt{34})(4x+y-55)$$

$$3\sqrt{17}x-5\sqrt{17}y+45\sqrt{17}=4\sqrt{34}x+\sqrt{34}y-55\sqrt{34}$$

$$0=(4\sqrt{34}-3\sqrt{17})x+(\sqrt{34}+5\sqrt{17})y+(-55\sqrt{34}-45\sqrt{17})=0$$

$$\cong \frac{10.9545x+26.4465y-506.2421=0}{10.9545 \qquad\qquad 10.9545}$$

$$x+2.4142y-46.2132=0 \quad \ldots 3)$$

∴ La ecuación de la bisectriz externa en C es: $\cong x+2.4142y-46.2132=0$

Luego, para hallar el centro de cada excírculo calculamos la intersección de la bisectriz externa de los ángulos de cada extremo de cada lado:

- Centro del excírculo tangente a $\overline{AB}$:

De 1) y 2): $\begin{cases} x+0.1899y+15=0 & \ldots ①^* \\ x-0.9232y-19.616=0 & \ldots ②^* \end{cases}$

$①^*-②^*$:

$$\begin{array}{r} x+0.1899y+15=0 \\ -(x-0.9232y-19.616=0) \\ \hline 1.1131y+34.616=0 \end{array}$$

$$y=\frac{-34.616}{1.1131}\cong -31.0987\approx -31$$

En $①^*$: $x+0.1899(-31.0987)+15=0$

$$x-5.9056+15=0$$

$$x+9.0944=0$$

$$x=-9.0944$$

Sea E_1 el centro del excírculo tangente a $\overline{AB}$: $E_1(-9.09,-31.1)$

∴ Las coordenadas del centro del excírculo son $E_1(-9.09,-31.1)$

-Centro del excírculo tangente a $\overline{AC}$:

De 1) y 3):

$$\begin{cases} x+0.1899y+15=0 & \ldots (1)^* \\ x+2.4142y-46.2132=0 & \ldots (2)^* \end{cases}$$

$(1)^*-(2)^*$:

$$\begin{array}{r} x+0.1899y+15=0 \\ -(x+2.4142y-46.2132)=0 \\ \hline -2.2243y+61.2132=0 \end{array}$$

$$y=\frac{-61.2132}{-2.2243}\cong 27.5202$$

En $(1)^*$: $x+0.1899(27.5202)+15=0$

$x+5.2261+15=0$

$x+20.2261=0$

$x=-20.2261$

Sea E_2 el centro de excírculo tangente a $\overline{AC}$: $E_2(-20.23, 27.52)$

$\therefore$ Las coordenadas del centro del excírculo son: $\underline{E_2(-20.23, 27.52)}$

-Centro del excírculo tangente a $\overline{BC}$:

De 2) y 3):

$$\begin{cases} x-0.9232y-19.616=0 & \ldots (1)^* \\ x+2.4142y-46.2132=0 & \ldots (2)^* \end{cases}$$

$(1)^*-(2)^*$:

$$\begin{array}{r} x-0.9232y-19.616=0 \\ -(x+2.4142y-46.2132=0) \\ \hline -3.3374y+26.5972=0 \end{array}$$

$$y=\frac{-26.5972}{-3.3374}\cong 7.9694$$

En $(1)^*$ $x-0.9232(7.9694)-19.616=0$

$x-7.3574-19.616=0$

$x-26.9734=0$

$x=26.9734$

Sea E_3 el centro del excírculo tangente a $\overline{BC}$: $E_3(26.97; 7.97)$

$\therefore$ Las coordenadas del centro del excírculo son: $\underline{E_3(26.97, 7.97)}$

$\therefore$ Incentro: $I(5.89, 4.86)$

Centro del excírculo tangente a:

$\overline{AB}$: $E_1(-9.09, -31.1)$

$\overline{AC}$: $E_2(-20.23, 27.52)$

$\overline{BC}$: $E_3(26.97, 7.97)$