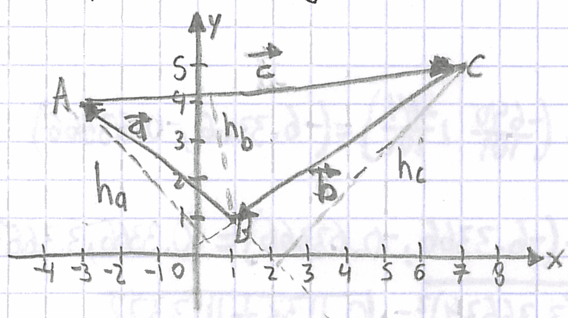
Alcantar Martínez Jesús

Trabajo 14

10

Problema 1. Usando el producto interior entre vectores, calcule las alturas para el triángulo $\triangle ABC$ formado por $A(-3,4)$, $B(1,1)$ y $C(7,5)$.



$\vec{a} = \overrightarrow{BA} = (-4,3)$
$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (-6,-4)$
$\vec{c} = \overrightarrow{AC} = (10,1)$

muy bien

Tenemos 3 alturas:
h_a que pasa por el punto A.
h_b que pasa por el punto B.
h_c que pasa por el punto C.

1) Para calcular h_a se puede calcular la ortogonal a la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$, es decir, a $P_{\vec{b}}\vec{a}$:

Sabemos que $P_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\cdot\vec{b}$

Encontramos $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\cdot\vec{b}$ y $\|\vec{b}\|^2$:

$\vec{a} = (-4,3)$
$\vec{b} = (-6,-4)$
$\vec{a}\cdot\vec{b} = 24-12 = 12$
$\|\vec{b}\|^2 = 36+16 = 52$

Por lo que $P_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{12}{52}(-6,-4) = \left(\frac{12(-6)}{52}, \frac{12(-4)}{52}\right) = \left(-\frac{72}{52}, -\frac{48}{52}\right) = (-1.3846, -0.9231)$

Y a su vez, $(P_{\vec{b}}\vec{a})^{\perp} = \vec{a} - P_{\vec{b}}\vec{a} = (-4,3) - (-1.3846,-0.9231) = (-2.6154, 3.9231)$

Entonces: $h_a = \|(P_{\vec{b}}\vec{a})^{\perp}\| = \sqrt{(-2.6154)^2 + (3.9231)^2} = \sqrt{6.8403 + 15.3907}$
$= \sqrt{22.2310} = 4.715$

$\therefore h_a = 4.715.$

2) Para calcular h_b se puede calcular la ortogonal a la proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{c}$, es decir, a $P_{\vec{c}}\vec{b}$:

Sabemos que $P_{\vec{c}}\vec{b} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{\|\vec{c}\|^2}\cdot\vec{c}$, entonces:

$\vec{b} = (-6, -4)$
$\vec{c} = (10, 1)$
$\vec{b} \cdot \vec{c} = -60 - 4 = -64$
$\|\vec{c}\|^2 = 10^2 + 1^2 = 101$

Entonces: $P_{\vec{c}}\vec{b} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{\|\vec{c}\|^2} \cdot \vec{c} = \frac{-64}{101} \cdot (10, 1) = \left(\frac{-640}{101}, \frac{-64}{101}\right) = (-6.3366, -0.63366)$

Y además: $(P_{\vec{c}}\vec{b})^{\perp} = \vec{b} - P_{\vec{c}}\vec{b} = (-6, -4) - (-6.3366, -0.63366) = (0.3366, 3.36634)$

Por lo que: $h_b = \|(P_{\vec{c}}\vec{b})^{\perp}\| = \sqrt{(0.3366)^2 + (3.36634)^2} = \sqrt{0.1133 + 11.3322}$
$= \sqrt{11.4455} = 3.38$

$\therefore h_b = 3.38$

3) Para calcular h_c se puede calcular la ortogonal a la proyección de $\vec{b}$ en $\vec{a}$, es decir, a $P_{\vec{a}}\vec{b}$:

Sabemos que $P_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}$

$\vec{b} = (-6, -4)$
$\vec{a} = (-4, 3)$
$\vec{b} \cdot \vec{a} = 24 - 12 = 12$
$\|\vec{a}\|^2 = 16 + 9 = 25$

Entonces: $P_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} \cdot \vec{a} = \frac{12}{25}(-4, 3) = \left(-\frac{48}{25}, \frac{36}{25}\right) = (-1.92, 1.44)$

Y además: $(P_{\vec{a}}\vec{b})^{\perp} = \vec{b} - P_{\vec{a}}\vec{b} = (-6, -4) - (-1.92, 1.44) = (-4.08, -5.44)$

Por lo que: $h_c = \|(P_{\vec{a}}\vec{b})^{\perp}\| = \sqrt{(-4.08)^2 + (-5.44)^2} = \sqrt{16.6464 + 29.5936}$
$= \sqrt{46.24} = 6.8$

$\therefore h_c = 6.8$

Por lo que: $\therefore$ $h_a = 4.715$
$h_b = 3.38$
$h_c = 6.8$

Problema 2: Usando el producto interior entre vectores calcule una recta ortogonal a $-4x+11y=-14$. Y que pase por el punto $P(5,4)$

Por lo visto en clase, podemos expresar a la recta como:

$$(-4,11)(x,y)=-14$$

Luego, tenemos un punto $P_0(x_0,y_0)$, y las restamos:

$$\begin{array}{rl} & (-4,11)(x,y)+14=0 \\ - & (-4,11)(x_0,y_0)+14=0 \\ \hline & (-4,11)((x,y)-(x_0,y_0))=0 \end{array}$$

donde $\vec{n}=(-4,11)$
$\vec{q}=(x,y)$
$\vec{P_0}=(x_0,y_0)$

Entonces: $\vec{n}(\vec{q}-\vec{P_0})=0$

como queremos calcular la recta ortogonal a la recta $-4x+11y=-14$, elegimos un vector $\vec{m}$ tal que sea perpendicular a $\vec{n}$, es decir. $\vec{m}\perp\vec{n}$:

Por lo visto en clase:
si $\vec{n}=(-4,11)$, entonces $\vec{m}=(11,4)$

por lo que, aplicando la fórmula, en este caso en particular:

$$\vec{n}(\vec{q}-\vec{P_0})=0 \Rightarrow \vec{m}(\vec{q}-\vec{P})=0$$

bien!

En este caso:
$\vec{n}=\vec{m}=(11,4)$
$\vec{q}=(x,y)$
$\vec{P_0}=\vec{P}=(5,4)$

Entonces: $(11,4)((x,y)-(5,4))=0$
$(11,4)(x-5,y-4)=0$

Desarrollando el producto interior:
$11x-55+4y-16=0$
$11x+4y-71=0$

$\therefore$ La recta ortogonal es $\underline{11x+4y-71=0}$