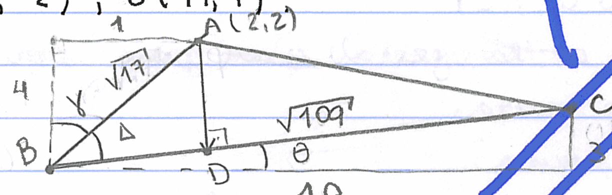
Geometría Analítica I
Trabajo 13

Prof.: Pablo Barrera — Sábado 19 de septiembre, 2015

Alumno: Victório Veneziani Pasin Friggi Rodrigues

10 muy bien.

Problema I: Usando el producto interior entre vectores, calcule el área del triángulo formado por $A(2,2)$, $B(1,-2)$, $C(11,1)$.



El área del triángulo será dado por:

$$A = \frac{\|\vec{AD}\|\cdot\|\vec{BC}\|}{2}, \text{ suponiendo que } \vec{AD} \perp \vec{BC}$$

Entonces:

$A = \vec{AD}\cdot\vec{BC}$, pero $\vec{DA} = \vec{BA} - \alpha\vec{BC}$, cuando $\vec{DA}$ es mínimo.

De ahí, sabemos que para que $\vec{DA}$ sea mínimo:

$$\alpha = \frac{(\vec{BA})\cdot(\vec{BC})}{\|\vec{BC}\|^2}$$

Pero,

$\vec{BA} = \vec{a} - \vec{b} = (2,2) - (1,-2) = (1,4)$; $\|\vec{BA}\| = \sqrt{17}$

y $\vec{BC} = \vec{c} - \vec{b} = (11,1) - (1,-2) = (10,3)$; $\|\vec{BC}\| = \sqrt{109}$

Entonces: $\vec{BD} = \alpha\cdot\vec{BC} = \frac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{\|\vec{BC}\|^2}\cdot\vec{BC} = \frac{\|\vec{BA}\|\,\|\vec{BC}\|\cdot\cos(\Delta)}{\|\vec{BC}\|^2}(\vec{BC}) =$

$$= \frac{\sqrt{17}\cdot\sqrt{109}}{109}\cdot\frac{22}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{109}}{}^{*}\cdot\vec{BC} = \frac{22}{109}\cdot\vec{BC} = \left(\frac{22}{109}\cdot 10, \frac{22}{109}\cdot 3\right) = (2.018, 0.605)$$

*Por la construcción, $\Delta + \gamma + \theta = 90°$ $\therefore$ $\Delta = 90° - (\theta+\gamma)$

Esto quiere decir que $\cos(\Delta) = \operatorname{sen}(\theta+\gamma)$

Y sabemos que: $\operatorname{sen}(\theta+\gamma) = \operatorname{sen}(\theta)\cdot\cos(\gamma) + \operatorname{sen}(\gamma)\cdot\cos(\theta) =$

$$= \frac{3}{\sqrt{109}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{10}{\sqrt{109}} = \frac{22}{\sqrt{17\cdot 109}} = \frac{22}{\sqrt{1853}} = \frac{22}{43.046}$$

Entonces, $\|\vec{BA}\|^2 = \|\vec{AD}\|^2 + \|\vec{BD}\|^2$ (pitágoras) $\therefore$ $17 = \|\vec{AD}\|^2 + 4.439$ $\therefore$ $\|\vec{AD}\|^2 = 12.561$

$\|\vec{AD}\| = 3.54$

El área entonces será

$$A = \frac{3.54\cdot\sqrt{109}}{2} = \frac{3.54\cdot 10.44}{2} = \underline{18.5\,u^2}$$

✓

Problema 2: Usando el producto interior entre vectores calcule la distancia del punto $P(5,4)$ a la recta $-4x+11y=-14$.

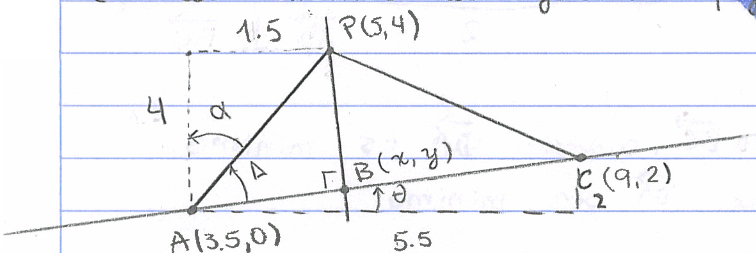
En la recta, podemos ver que si:

1) $y=0$, $x = 14/4 = 3.5 \Rightarrow$ punto $A(3.5,0)$

2) $x=9$, $y = 22/11 = 2 \Rightarrow$ punto $C(9,2)$

Trazando una perpendicular a la recta que pase por P, obtenemos el punto B en la recta.

Entonces tenemos la siguiente figura.



* Vemos que: $\|\vec{AP}\|^2 = 18.25$

$\|\vec{AC}\|^2 = 34.25$

Como demostrado en clase, $\vec{BP} = \vec{AP} - \beta\vec{AC}$ y será su menor valor, que es cuando es perpendicular a $\vec{AC}$, cuando

$$\beta = \frac{\vec{AP}\cdot\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|^2}$$

y tal valor será:

$$\|\vec{BP}\|^2 = \frac{\|\vec{AP}\|^2 \cdot \|\vec{AC}\|^2 - (\vec{AP}\cdot\vec{AC})^2}{\|\vec{AC}\|^2} = \frac{\|\vec{AP}\|^2 \cdot \|\vec{AC}\|^2 - \left[\|\vec{AP}\|\cdot\|\vec{AC}\|^2\cdot\cos(\Delta)\right]^2}{\|\vec{AC}\|^2}$$

$$= \|\vec{AP}\|^2 - \|\vec{AP}\|^2\cdot\cos^2(\Delta) = \|\vec{AP}\|^2\left(1-\cos^2(\Delta)\right).$$

Pero por la construcción: $\Delta+\theta+\alpha = 90°$ $\therefore$ $\Delta = 90-(\theta+\alpha)$

Esto quiere decir que $\operatorname{sen}(\theta+\alpha) = \cos(\Delta)$

Sabemos que: $\operatorname{sen}(\theta+\alpha) = \operatorname{sen}(\theta)\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\theta) =$

$$= \frac{2}{\sqrt{34.25}}\cdot\frac{4}{\sqrt{18.25}} + \frac{1.5}{\sqrt{18.25}}\cdot\frac{5.5}{\sqrt{34.25}} = \frac{16.25}{\sqrt{18.25}\cdot\sqrt{34.25}}$$

Entonces: $\|\vec{BP}\|^2 = \|\vec{AP}\|^2\left(1-\cos^2(\Delta)\right) = 18.25\left(1 - \frac{264.0625}{625.0625}\right)$

$$= 18.25\cdot\frac{361}{625.0625} = 10.54 = \|\vec{BP}\|^2$$

$\therefore$ $\boxed{\|\vec{BP}\| = 3.25}$