Geometria Analitica I

Trabajo 13

Prof. Pablo Barrera

Rafael Fernando. Olmedo Aguilar

Producto ~~Producto~~ Interior:

El producto ~~#~~interior es un escalar. Dos vectores en el plano o en el espacio usualmente ~~dos~~ paralelos : $\vec{a} \neq \beta \vec{b}$. La pregunta es para que valor de β el vector $\beta \vec{b}$ es cercano a $\vec{a}$ el vector $\beta\vec{b}$ es cercano a $\vec{a}$.

Sea el vector $\vec{c}$ que encierra el ciclo $\vec{a}$ y $\beta\vec{b}$, tenemos que.

$$\vec{c} = \vec{a} - \beta \vec{b}$$

En terminos practicos necesitamos calcular β de manera que :

$\|\vec{a} - \beta\vec{b}\|$ sea ~~lo menor~~ pequeño posible.

Definamos una funcion por β.

$$f(\beta) = \|\vec{a} - \beta\vec{b}\|^2 = (\vec{a} - \beta\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \beta\vec{b})$$

y desarrollemos.

$$f(\beta) = \vec{a}\cdot\vec{a} - 2\beta\vec{a}\cdot\vec{b} + \beta^2\vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$\|\vec{a}\|^2 - 2\beta\vec{a}\vec{b} + \beta^2\|\vec{b}\|^2$$

Lo cual es una parabola que alcanza su minimo valor cuando esta en su vertice. $\Rightarrow$

$$f(\beta) = \|\vec{a}\| - 2\beta\vec{a}\cdot\vec{b}\frac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|} + \|\vec{b}\|^2$$

Completando el binomio.

$$= \left(\beta\|\vec{b}\| - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\right)^2 - \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\right)^2 + \|\vec{a}\|^2$$

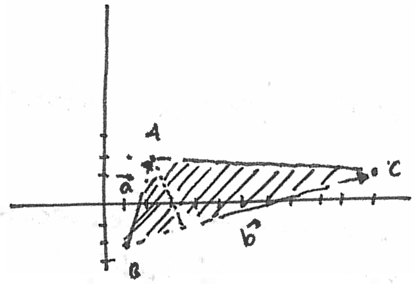
$$\beta\|\vec{b}\| = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|} \Rightarrow \beta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}$$

El vector $\beta\vec{b}$ e la proyeccion del vector $\vec{a}$ a $\vec{b}$.

$$P_{\vec{b}}\vec{a} = \beta\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\vec{b}$$

Es ortogonal. $(P_{\vec{b}}\vec{a})^{\perp} = \vec{a} - \beta\vec{b}$

Problema 1. Usando el producto interior entre vectores, calcule el área del triangulo formado por $A(2,2)$, $B(1,-2)$, $C(11,1)$



$\overrightarrow{BA} = \vec{a}$
$\overrightarrow{BC} = \vec{b}$

Para calcular la altura que pasa por A basta calcular la ortogonal a la proyeccion de $\vec{a}$ a $\vec{b}$.

Calculando: $\begin{cases} \vec{a} = (2,2) - (1,-2) = (1,4) \\ \vec{b} = (11,1) - (1,-2) = (10,3) \end{cases}$

Y con esto $\vec{a}\cdot\vec{b} = 10+12 = 22$ y $\|\vec{b}\|^2 = \vec{b}\cdot\vec{b} = 109$

Con esto el vector proyeccion es:

$$P_{\vec{b}}\vec{a} = \beta\vec{b}$$
$$= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\vec{b} = \frac{22}{109}\vec{b} = .20183(1,-2)$$

Y el ortogonal a esta proyección:

$$(P_{\vec{b}}\vec{a})^{\perp} = \vec{a} - P_{\vec{B}}\vec{a}$$
$$= \vec{a} - \beta\vec{b}$$
$$= (2,2) - .20183(1,-2)$$
$$= (2-.20183,\ 2+.4036) = (1.798,\ 2.4036)$$

La altura que parte del vertice A es la longitud del vector ortogonal a la proyección.

$$h = \|(P_{\vec{b}}\vec{a})^{\perp}\| = \sqrt{(1.798)^2+(2.4036)^2} \approx 3.34.$$

La distancia entre el punto B y C es $\|\vec{b}\| = \sqrt{109} = 10.4403.$

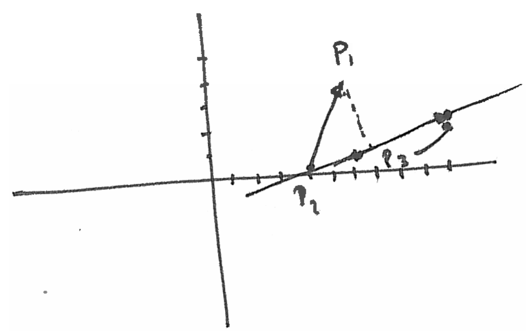
$$A = \frac{1}{2}(\|\vec{b}\|\cdot\|(P_{\vec{b}}\vec{a})^{\perp}\|) = \frac{1}{2}((10.4403)\cdot(3.34)) = 18.479\,u^2.$$

Problema 7. Usando el producto interior entre vectores calcule la distancia del punto $P_1(5,4)$ a la recta $-4x + 11y = -14$.

Calculamos dos puntos de la recta. cuyas abscisas y ordenadas son mayores al punto P.

$$11y = 4x - 14 \qquad \left\{ \begin{array}{ll} x = 10 & y = \frac{26}{11} \\ x = 4 & y = \frac{2}{11} \end{array} \right.$$
$$y = \frac{4x-14}{11}$$

y declaramos los puntos $P_2\left(4, \frac{2}{11}\right)$ y $P_3\left(10, \frac{26}{11}\right)$



Declaramos vectores:

$$P_2P_1 = \vec{a} \qquad y \qquad P_2P_3 = \vec{b}$$
$$\vec{a} = (5,4) - \left(4, \frac{2}{11}\right) = \left(1, \frac{42}{11}\right)$$
$$\vec{b} = \left(10, \frac{26}{11}\right) - \left(4, \frac{2}{11}\right) = \left(6, \frac{24}{11}\right)$$

Declaramos: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 + 8.3305 = 14.3305$ y $\|\vec{b}\|^2 = \vec{b} \cdot \vec{b} = 36 + 4.7603 = 40.7603$.

$$P_{\vec{b}}\vec{a} = \beta \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} \cdot \vec{b}$$
$$= \frac{14.3305}{40.7603}\left(6, \frac{24}{11}\right) =$$

y el ortogonal $(P_{\vec{b}}\vec{a})^{\perp} = \vec{a} - \beta \vec{b}$

$$= \left(1, \frac{42}{11}\right) - \frac{14.3305}{40.7603}\left(6, \frac{24}{11}\right)$$
$$= (-.1094, 3.05109)$$

$$d = \|P_{\vec{b}}\vec{a}\|^{\perp} = \sqrt{(-.1094)^2 + (3.05109)^2} = 3.25 \text{ unidades.}$$