Ramírez García Miguel Ángel 17/09/2015

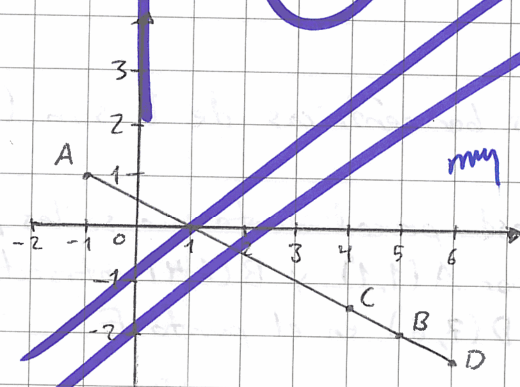
Trabajo 12

10

Problema 1. Para los puntos $A(-1,1)$ y $B(5,-2)$ calcule las coordenadas baricéntricas de

a) $C(4,-1.5)$

b) $D(6,-2.5)$



muy bien!

a)

Utilizando el Tip tenemos la sig. ecuación para encontrar las coordenadas baricéntricas de C

$C(\alpha)=(1-\alpha)A+\alpha B$

$(4,-1.5)=(1-\alpha)(-1,1)+\alpha(5,-2)$

$(4,-1.5)=(-1+\alpha,1-\alpha)+(5\alpha,-2\alpha)$

$(4,-1.5)=(-1+6\alpha,1-3\alpha)$

En el que ahora tenemos el sig. sistema de ecuaciones

$$4=-1+6\alpha$$
$$-1.5=1-3\alpha$$

donde $\alpha=\frac{5}{6}$

$\therefore$ Las coordenadas baricéntricas de C son $\left(\frac{1}{6K},\frac{5}{6K}\right)$; $K=cte.$

b)

Utilizando el Tip tenemos que

$D(\alpha)=(1-\alpha)A+\alpha B$

$(6,-2.5)=(1-\alpha)(-1,1)+\alpha(5,-2)$

$(6,-2.5)=(-1+\alpha,1-\alpha)+(5\alpha,-2\alpha)$

$(6,-2.5)=(-1+6\alpha,1-3\alpha)$

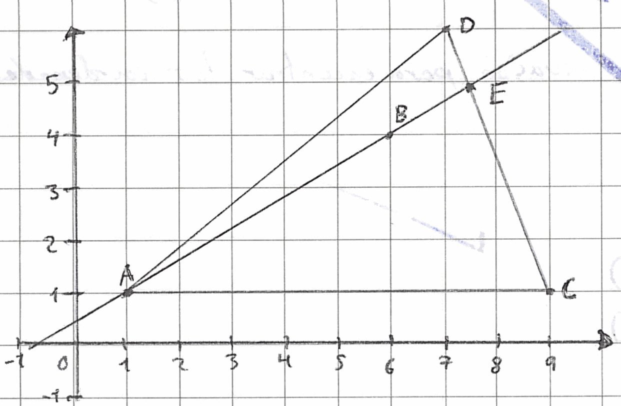
Donde tenemos ahora el sig. sistema de ecuaciones

$$6 = -1 + 6\alpha$$
$$-2.5 = 1 - 3\alpha$$

donde $\alpha = \frac{7}{6}$

$\therefore$ Las coordenadas baricéntricas de D son $\left(-\frac{1}{6K}, \frac{7}{6K}\right)$; $K = cte.$

Problema 2.- Siga el procedimiento que se les pide hasta completar el ejercicio.
La recta formada por $A(1,1)$ y $B(6,4)$ intersecta a la recta formada por los puntos $C(9,1)$ y $D(7,6)$ en el punto E.



a) Usando vectores, calcule el punto E de la intersección entre ambas rectas, Esto es, exprese E como

$$E = \alpha_1 A + \beta_1 B, \quad con \ \alpha_1 + \beta_1 = 1$$

y exprese E como

$$E = \alpha_2 C + \beta_2 D, \quad con \ \alpha_2 + \beta_2 = 1$$

y resuelva para $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1 \beta_2$.

Utilizando las ecuaciones anteriores tenemos que

$$E = \alpha_1 A + \beta_1 B$$
$$(x,y) = \alpha_1 (1,1) + \beta_1 (6,4)$$
$$(x,y) = (\alpha_1, \alpha_1) + (6\beta_1, 4\beta_1)$$
$$(x,y) = (\alpha_1 + 6\beta_1, \alpha_1 + 4\beta_1)$$

$$E = \alpha_2 C + \beta_2 D$$
$$(x,y) = \alpha_2 (9,1) + \beta_2 (7,6)$$
$$(x,y) = (9\alpha_2, \alpha_2) + (7\beta_2, 6\beta_2)$$
$$(x,y) = (9\alpha_2 + 7\beta_2, \alpha_2 + 6\beta_2)$$

Ramírez García Miguel Ángel 17/09/2015

donde tenemos que

$$x = \alpha_1 + 6\beta_1 \qquad x = 9\alpha_2 + 7\beta_2$$
$$y = \alpha_1 + 4\beta_1 \qquad y = \alpha_2 + 6\beta_2$$

Igualando las ecuaciones tenemos que

$$\alpha_1 + 6\beta_1 = 9\alpha_2 + 7\beta_2$$
$$\alpha_1 + 4\beta_1 = \alpha_2 + 6\beta_2$$

Utilizando que $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ y $\alpha_2 + \beta_2 = 1$ despejamos α_1 y α_2 para luego sustituirlo en las ecuaciones anteriores

$$(1-\beta_1) + 6\beta_1 = 9(1-\beta_2) + 7\beta_2$$
$$(1-\beta_1) + 4\beta_1 = (1-\beta_2) + 6\beta_2$$

Y esto es igual a

$$1 - 5\beta_1 = 9 - 2\beta_2$$
$$1 + 3\beta_1 = 1 + 5\beta_2$$

Simplificado nos queda

$$5\beta_1 + 2\beta_2 = 8$$
$$3\beta_1 - 5\beta_2 = 0$$

En donde $\beta_1 = \frac{40}{31}$ y $\beta_2 = \frac{24}{31}$ al resolver el sistema de ecuaciones.

Por lo tanto $\alpha_1 = -\frac{9}{31}$ y $\alpha_2 = \frac{7}{31}$

Y a su vez si sustituimos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ y β_2 en cualquiera de las dos ecuaciones del punto E tenemos que E está en $\left(\frac{231}{31}, \frac{151}{31}\right)$.

b) Ahora regrese a que E se escribe en términos de A y B y de igual manera en términos de C y D

$$\alpha_1 A + \beta_1 B = \alpha_2 C + \beta_2 D$$

de ahí, despeje a B como

$$B = \alpha A + \beta C + \gamma D$$

Observe que $\alpha+\beta+\gamma=1$. A las coordenadas (α,β,γ) se les conoce como las coordenadas baricéntricas de B con respecto a (A,C,D).
Una vez que calcule esos escalares compruebe que B

$$B=\alpha A+\beta C+\gamma D$$

Tenemos con la ecuación anterior que

$$B=\alpha A+\beta C+\gamma D$$
$$(6,4)=\alpha(1,1)+\beta(9,1)+\gamma(7,6)$$
$$(6,4)=(\alpha,\alpha)+(9\beta,\beta)+(7\gamma,6\gamma)$$
$$(6,4)=(\alpha+9\beta+7\gamma,\ \alpha+\beta+6\gamma)$$

Donde tenemos el sig. sistema de ecuaciones

$$6=\alpha+9\beta+7\gamma$$
$$4=\alpha+\beta+6\gamma$$

Utilizando que $\alpha+\beta+\gamma=1$ y despejando a α tenemos que

$$6=(1-\beta-\gamma)+9\beta+7\gamma$$
$$4=(1-\beta-\gamma)+\beta+6\gamma$$

Simplicando queda

$$6=1+8\beta+6\gamma$$
$$4=1+5\gamma$$

donde $\gamma=\frac{3}{5}$ y $\beta=\frac{7}{40}$ al resolver el sistema de ecuaciones anterior.

Por lo tanto $\alpha=\frac{9}{40}$

Por lo tanto las coordenadas baricéntricas de B son $\left(\frac{9}{40},\frac{7}{40},\frac{3}{5}\right)$

Comprobando tenemos

$$B=\alpha A+\beta C+\gamma D$$
$$(6,4)=\left(\tfrac{9}{40}\right)(1,1)+\left(\tfrac{7}{40}\right)(9,1)+\left(\tfrac{3}{5}\right)(7,6)$$
$$(6,4)=\left(\tfrac{9}{40},\tfrac{9}{40}\right)+\left(\tfrac{63}{40},\tfrac{7}{40}\right)+\left(\tfrac{21}{5},\tfrac{18}{5}\right)$$
$$(6,4)=\left(\tfrac{9}{40}+\tfrac{63}{40}+\tfrac{21}{5},\ \tfrac{9}{40}+\tfrac{7}{40}+\tfrac{18}{5}\right)$$

Ramírez García Miguel Ángel 17/09/2015

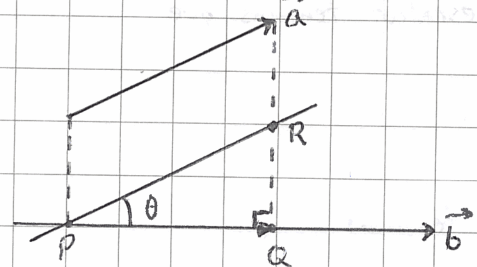
$$(6,4) = (6,4)$$ ✓

Problema 3. Demuestre la propiedad distributiva del producto escalar de dos vectores

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$

Antes de demostrar la propiedad distributiva veremos lo que es una proyección de un vector sobre otro y lo demostraremos.

Tenemos la siguiente Figura con los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$



La proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b} = \overrightarrow{PQ} = \text{Proy}_{\vec{b}}\,\vec{a}$

También tenemos que $\overline{PR} = |\vec{a}|$

Y como el ΔPQR es rectángulo podemos decir que $\cos\theta = \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{PR}}$

que sustituyendo queda $\cos\theta = \dfrac{\text{Proy}_{\vec{b}}\,\vec{a}}{|\vec{a}|}$, despejando $\text{Proy}_{\vec{b}}\,\vec{a}$ nos queda

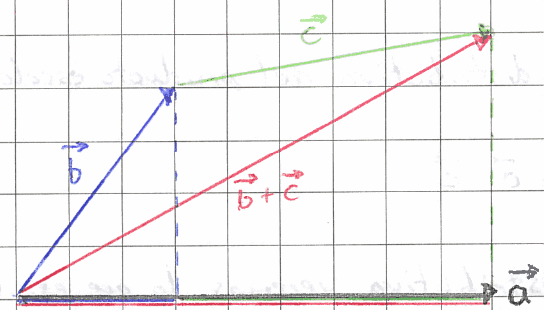
$\text{Proy}_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\theta$, que $\cos\theta$ es igual a $\cos(\widehat{\vec{b},\vec{a}})$. Por tanto nos queda

$$\text{Proy}_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{b},\vec{a}})$$

Sabiendo esto podemos ir a la demostración de la propiedad distributiva.

falta observar y a ni

Tenemos la sig. figura con los sig. vectores



ok

P. d. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

Recordando la definición de producto escalar tenemos que

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}||\vec{b}+\vec{c}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}+\vec{c}})$.

Y por proyección de un vector sobre otro tenemos

$|\vec{a}||\vec{b}+\vec{c}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}+\vec{c}}) = |\vec{a}|\cdot proy_{\vec{a}}\,\vec{b}+\vec{c}$

Y en la figura nos dice que la $proy_{\vec{a}}\,\vec{b}+\vec{c} = proy_{\vec{a}}\,\vec{b} + proy_{\vec{a}}\,\vec{c}$. Por lo tanto

$|\vec{a}|\cdot proy_{\vec{a}}\,\vec{b}+\vec{c} = |\vec{a}|\cdot(proy_{\vec{a}}\,\vec{b} + proy_{\vec{a}}\,\vec{c})$

Y como $|\vec{a}| \in \mathbb{R}$ podemos aplicar distributividad del producto

$|\vec{a}|\cdot(proy_{\vec{a}}\,\vec{b} + proy_{\vec{a}}\,\vec{c}) = |\vec{a}|\,proy_{\vec{a}}\,\vec{b} + |\vec{a}|\,proy_{\vec{a}}\,\vec{c} =$

Y esto es igual a

$|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) + |\vec{a}||\vec{c}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{c}}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

Q.P.D.