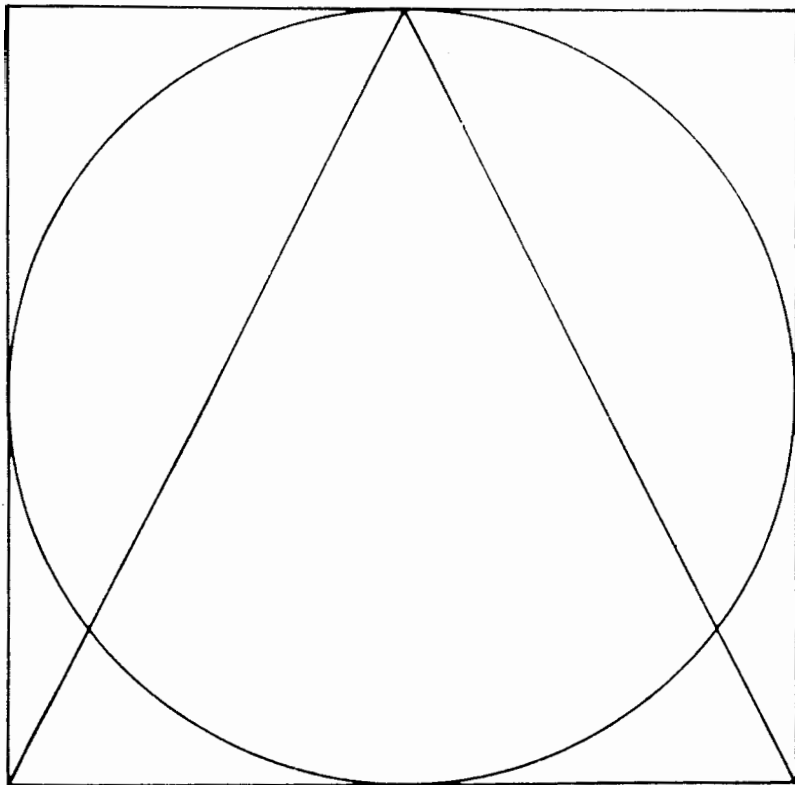


МАТЕМАТИКА ДЛЯ ТЕХНИКУМОВ

ГЕОМЕТРИЯ

Под редакцией Г. Н. Яковлева

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА



Geometria

Dirigido por G. N. Yákovliev

EDITORIAL MIR MOSCÚ

Traducido del ruso por
A. Mijaílín

INDICE

Prefacio	8
Capítulo I. Vectores en el plano y en el espacio	11
§ 1. Variables vectoriales y escalares	11
§ 2. Vectores	12
§ 3. Suma de vectores	13
§ 4. Vectores opuestos. Sustracción de los vectores	18
§ 5. Multiplicación del vector por un número	19
§ 6. Vectores colineales	21
§ 7. Ángulo entre dos vectores	23
§ 8. Desarrollo del vector en el plano en dos vectores no colineales	24
§ 9. Vectores coplanares	27
§ 10. Desarrollo del vector en tres vectores no coplanares	29
§ 11. Operaciones con los vectores definidos por sus coordenadas	31
§ 12. Sistema cartesiano de coordenadas	32
§ 13. Transformación de un sistema cartesiano rectangular de coordenadas a otro	36
§ 14. Sistema polar de coordenadas	41
§ 15. Longitud del vector	43
§ 16. Proyección del vector sobre el eje. Propiedades del vector	47
§ 17. Producto escalar de dos vectores	50
§ 18. Propiedades del producto escalar de los vectores	51
§ 19. Producto escalar de vectores dados por sus coordenadas	53
§ 20. Cálculo del ángulo entre dos vectores	54
§ 21. Producto vectorial de dos vectores y sus propiedades	55
§ 22. Producto vectorial de dos vectores definidos por sus coordenadas	59
§ 23*. Producto mixto de tres vectores y sus propiedades	61
§ 24*. Producto mixto de tres vectores definidos por sus coordenadas	64

Impreso en la URSS

© Издательство «Наука». 1982
© Traducción al español. Editorial Mir. 1985

§ 25. Solución de los problemas por el método vectorial	65
Problemas para el capítulo I	76
Capítulo II. Rectas en el plano	
§ 26. Ecuaciones con dos variables y su gráfico	84
§ 27. Ecuaciones canónicas y paramétricas de la recta	84
§ 28. Ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados	85
§ 29. Ecuación de una recta que pasa por el punto dado perpendicularmente al vector dado	89
§ 30. Ecuación general de una recta	94
§ 31. Ecuación de una recta con un coeficiente angular	97
§ 32. Cálculo del ángulo entre las rectas, definidas por ecuaciones generales. Condiciones de paralelismo y de perpendicularidad de dos rectas	101
§ 33. Cálculo del ángulo entre las rectas definidas por las ecuaciones con coeficientes angulares	104
§ 34*. Cálculo del ángulo entre las rectas definidas por las ecuaciones canónicas	107
§ 35*. Ecuación normalizada de una recta	109
§ 36*. Distancia de un punto a una recta	111
Problemas para el capítulo II	114
Problemas para el capítulo II	116
Capítulo III. Curvas de segundo orden	
§ 37. Circunferencia	124
§ 38. Elipse	124
§ 39. Investigación de la elipse por medio de su ecuación canónica	127
§ 40. Hipérbola	131
§ 41. Investigación de la hipérbola por medio de su ecuación canónica	137
§ 42. Parábola	140
§ 43. Ecuación de la elipse, de la hipérbola y de la parábola en otros sistemas de coordenadas (no canónicos)	149
§ 44. Ecuación general de segundo orden con dos variables	153
Problemas para el capítulo III	160
Problemas para el capítulo III	165
Capítulo IV. Rectas y planos en el espacio. Poliedros	
§ 45. Axiomas principales de la estereometría	173
§ 46. Posición recíproca de las rectas en el espacio	173
§ 47. Criterio de paralelismo de una recta y un plano	174
§ 48. Planos paralelos	177
§ 49. Angulo entre las rectas en el espacio	178
§ 50. Perpendicularidad de la recta y del plano	180
Perpendicularidad de la recta y del plano	181

§ 51. Teorema de las tres perpendiculares	184
§ 52. Angulos diedros	189
§ 53. Planos perpendiculares	191
§ 54. Proyección ortogonal de las figuras	192
§ 55. Area de la proyección de un polígono	196
§ 56. Angulos triedros y poliedros	198
§ 57. Prisma	202
§ 58. Pirámide y pirámide truncada	206
§ 59*. Poliedros	211
§ 60*. Poliedros regulares	212
Problemas para el capítulo IV	215
Capítulo V. Ecuaciones de las rectas y de los planos en el espacio	
§ 61. Ecuaciones de la recta	220
§ 62. Ecuación del plano que pasa por tres puntos dados no situados en una misma recta	224
§ 63. Ecuación del plano que pasa por un punto dado y es perpendicular a un vector dado	226
§ 64. Ecuación general del plano	228
§ 65. Cálculo del ángulo entre los planos. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad	231
§ 66. Condiciones de coincidencia e intersección de los planos	233
§ 67. Ecuación normal del plano	237
§ 68. Distancia de un punto a un plano	239
§ 69. Cálculo de un ángulo entre rectas	241
§ 70. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad de dos rectas	244
§ 71. Rectas cruzadas. Condición de pertenencia de dos rectas a un mismo plano	247
§ 72. Cálculo del ángulo entre una recta y un plano. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad de una recta y un plano	249
Problemas para el capítulo V	256
Capítulo VI. Superficies curvilíneas elementales y cuerpos de revolución	
§ 73. La esfera y el cuerpo esférico	262
§ 74. Posición recíproca del plano y la esfera	265
§ 75*. Superficies de revolución	267
§ 76*. Superficies cilíndricas	273
§ 77*. Superficies cónicas	279
§ 78*. Cono y cono truncado	281
§ 79*. El cilindro	283
Problemas para el capítulo VI	284

Capítulo VII. Volúmenes de los cuerpos y áreas de las superficies

§ 80. Volumen del paralelepípedo	287
§ 81. Volumen del prisma recto	290
§ 82. Volumen del cilindro recto	292
§ 83. Cálculo del volumen de un cuerpo según las áreas de sus secciones paralelas	294
§ 84. Volumen de un cuerpo de revolución	297
§ 85. Volumen del cono circular recto	299
§ 86. Volumen de la esfera y de sus partes	304
§ 87*. Volumen de un cilindro arbitrario	306
§ 88. Volumen de la pirámide y de la pirámide truncada	308
§ 89*. Volumen de un cono arbitrario	314
§ 90. Área de la superficie del cilindro, del cono y del cono truncado	313
§ 91. Área de una superficie de revolución	315
§ 92. Área de la esfera y de sus partes	318
§ Problemas para el capítulo VII	320
Respuestas	330
Algunas fórmulas y ecuaciones	342
Breve esbozo histórico	346

PREFACIO

Este libro es un manual del curso de «Geometría» para los centros de enseñanza secundaria especial. Los autores trataron de dar a conocer a los estudiantes las nociones matemáticas más importantes y los métodos que tienen gran aplicación, así como de mantener una debida sucesión en el contenido, terminología y simbolismo con el curso de matemática de la escuela secundaria. El material teórico se expone conjuntamente con el análisis de los problemas, y al final de cada capítulo se ofrecen problemas para el estudio individual de los estudiantes.

La segunda edición del manual está representada por un solo libro y se modificó sustancialmente, tomando en cuenta las observaciones de profesores y metodistas formuladas al discutir el manual, así como la experiencia acumulada durante el trabajo con el mismo. Se modificó y complementó el sistema de ejercicios para cada capítulo.

Señalemos las diferencias más sustanciales de la segunda edición del manual.

En la nueva edición los vectores en el plano y en el espacio se interpretan no como trasladados paralelos, sino como segmentos dirigidos con las respectivas operaciones de adición de los vectores y de multiplicación del vector por un número. Los problemas geométricos y físicos que se resuelven por el método vectorial (cap. I) están sistematizados y reunidos en un mismo párrafo. El número de tales problemas fue considerablemente aumentado.

El material del capítulo II «Rectas en el plano» y del capítulo III «Curvas de segundo orden» está considerablemente modificado y expuesto con mayor precisión. También se efectuaron algunas reducciones. Por ejemplo, del capítulo II se excluyó el párrafo «Ecuación de una recta en coordenadas polares», y del capítulo III, los párrafos dedi-

VECTORES EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO

§ 1. Variables vectoriales y escalares

En la mecánica, en la física y en muchas ciencias técnicas se estudian magnitudes de distinto género. Unas magnitudes (longitud, área, volumen, masa, densidad, temperatura, etc.) se definen completamente por un solo valor numérico, una vez escogida la unidad de medida. Tales magnitudes se denominan variables *escalares* (numéricas).

Otras magnitudes (fuerza, velocidad, aceleración, etc.) se definen no sólo por el valor numérico, sino también por

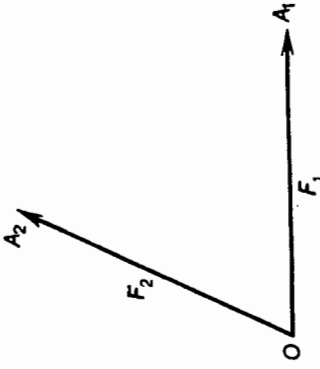


Fig. 1

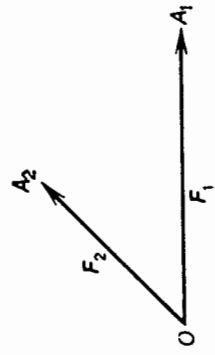


Fig. 2

la orientación en el espacio. Tales magnitudes se denominan variables *vectoriales*.

La variable vectorial se expresa geoméricamente por medio de un segmento de determinadas longitud y dirección. Al mismo tiempo, la longitud del segmento, según la unidad de escala escogida, es igual al valor numérico de la variable vectorial, y la dirección del segmento coincide con la dirección de esta variable. Supongamos, por ejemplo, que al punto O están aplicadas dos fuerzas F_1 y F_2 (fig. 1). Las

cados a la construcción de puntos de la elipse, hipérbola y parábola con ayuda del compás y la regla.

La primera parte del capítulo IV «Rectas y planos en el espacio. Poliedros» está escrita de nuevo y contiene los principales conocimientos de la estereometría. Aquí están expuestas tales cuestiones como la axiomática de la estereometría, situación recíproca de las rectas y planos en el espacio, el teorema de las tres perpendiculares, etc. La segunda parte del capítulo IV está dedicada a los poliedros y es una modificación del material correspondiente del capítulo II parte II de la primera edición.

El capítulo V «Ecuaciones de las rectas y de los planos en el espacio» está reducido considerablemente, ya que el material relativo a la estereometría está expuesto, principalmente, en el capítulo anterior, sin servirse de los métodos de la geometría analítica.

En el capítulo VII «Volúmenes de los cuerpos y áreas de las superficies» están simplificadas sustancialmente las definiciones y terminología. La deducción de muchas fórmulas está simplificada, y algunas fórmulas secundarias están suprimidas.

En la segunda edición del libro está incluido un «Breve esbozo histórico».

El material que excede el marco del programa está marcado con un asterisco.

En la preparación de la segunda edición se prestó especial atención al mejoramiento del estilo. Los autores consideran que lograron simplificar muchas demostraciones, haciéndolas así más accesibles para los estudiantes.

Los problemas están sistematizados para todos los capítulos, gran parte de ellos está sustituida por nuevos. Las formulaciones de muchos problemas viejos están precisadas. Han sido eliminadas todas las inexactitudes y erratas percibidas en las respuestas.

Los autores consideran como un deber agradable expresar su gratitud al crítico oficial, profesor de la escuela técnica de la ciudad de Kuznetsk, V. I. Kogan, al metodista superior del Gabinete Científico y Metodológico del Ministerio de Enseñanza Superior de la URSS, I. I. Agápova y a los profesores de las escuelas técnicas de Moscú A. A. Adamovich, I. V. Borisova, Z. I. Dobrina, E. V. Zarkova que examinaron atentamente el original del manual e hicieron una serie de valiosas observaciones críticas.

Los autores

magnitudes de estas fuerzas son iguales, pero tienen distintas direcciones y, por lo tanto, están representadas en la figura por dos segmentos dirigidos distintos \vec{OA}_1 y \vec{OA}_2 de igual longitud.

Si la magnitud de la fuerza F_1 es superior a la magnitud de la fuerza F_2 , la longitud del segmento \vec{OA}_1 , que expresa

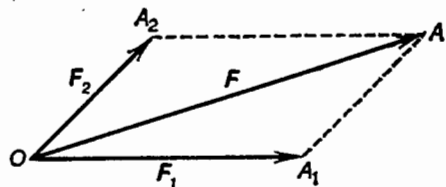


Fig. 3

la fuerza F_1 , debe ser respectivamente mayor que la longitud del segmento \vec{OA}_2 , que presenta la fuerza F_2 (fig. 2).

De la mecánica se sabe, que las fuerzas aplicadas a un mismo punto se suman según *la regla del paralelogramo*. Por ejemplo, la acción de las fuerzas F_1 y F_2 , aplicadas al punto O , es equivalente a la acción de la fuerza F , que se expresa en la figura mediante la diagonal dirigida \vec{OA} del paralelogramo OA_1AA_2 (fig. 3), construido sobre los segmentos dirigidos \vec{OA}_1 y \vec{OA}_2 . En este caso se escribe $F = F_1 + F_2$.

En general, para estudiar las variables vectoriales es cómodo utilizar los segmentos dirigidos, para los cuales, según las reglas respectivas, están introducidas la noción de igualdad y definidas las operaciones de adición y multiplicación por un número. Tales segmentos dirigidos se denominan *vectores*.

§ 2. Vectores

Cualquier segmento de una recta tiene dos puntos extremos. Si uno de ellos se toma como origen del segmento y el otro, como punto final, el segmento en cuestión se denota *dirigido*. Los segmentos dirigidos habitualmente se denotan con dos letras con flechas, por ejemplo, \vec{AB} , \vec{BA} , \vec{OA} , \vec{OB} , etc., donde la primera letra denota el origen del segmento y la segunda, el extremo del segmento.

Dos segmentos dirigidos se consideran *iguales* si tienen longitudes iguales, son paralelos y están orientados en un mismo sentido. Por ejemplo, en la figura 4 donde $ABCD$ es un paralelogramo, los segmentos dirigidos \vec{AB} y \vec{DC} son iguales, ya que $|AB| = |DC|$, $(AB) \parallel (DC)$ y los segmentos \vec{AB} y \vec{DC} están orientados en el mismo sentido.

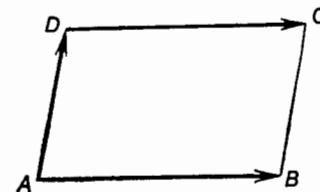


Fig. 4

Los segmentos dirigidos \vec{AB} y \vec{AD} no son iguales, ya que no son paralelos. Los segmentos dirigidos \vec{AB} y \vec{CD} tampoco son iguales, ya que tienen el sentido opuesto, aunque son paralelos y de la misma longitud.

Los segmentos dirigidos con la noción de igualdad introducida se denominan *vectores*. En los párrafos que siguen serán introducidas para ellos las operaciones de adición, sustracción y multiplicación por un número.

Conforme a la definición todos los segmentos dirigidos iguales entre sí representan un mismo vector. Por ejemplo, si un vector representado en la figura 4 como un segmento dirigido \vec{AB} , se denota a , entonces $a = \vec{AB} = \vec{DC}$.

La longitud del vector $a = \vec{AB}$ denotada $|a|$ o $|\vec{AB}|$, es la longitud del segmento AB . La dirección del vector $a = \vec{AB}$, es la dirección definida por el rayo AB .

Un vector, cuya longitud es igual a cero, se denomina *vector nulo* y se designa 0 . Es evidente, que el origen del vector nulo coincide con su extremo: $0 = \vec{AA} = \vec{BB}$.

Así pues, cada vector $a \neq 0$ se define completamente por la longitud y la dirección. El vector nulo no tiene dirección.

§ 3. Suma de vectores

Sean dados dos vectores $a = \vec{OA}$ y $b = \vec{OB}$ (fig. 5). Tracemos del punto A tal segmento AC , que $\vec{AC} = b$. Entonces el vector $c = \vec{OC}$ se denomina *suma de los vectores* a y b y se designa $a + b$.

Así pues, $\vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}$. Esta igualdad se denomina *regla del triángulo* de adición de dos vectores. Es evidente, que esta regla es válida en el caso, cuando los puntos O, A

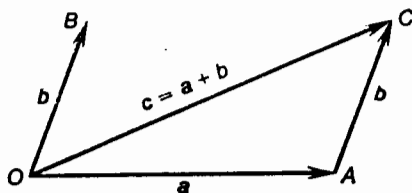


Fig. 5

y B se encuentran en una misma recta (figs. 6, 7). En particular, $a + 0 = a$.

La adición de los vectores tiene las siguientes propiedades:

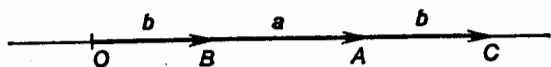


Fig. 6

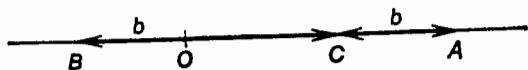


Fig. 7

1. Propiedad de conmutatividad:
para cualesquiera vectores a y b

$$a + b = b + a. \quad (1)$$

2. Propiedad de asociatividad:
para cualesquiera vectores a, b y c

$$(a + b) + c = a + (b + c). \quad (2)$$

□ 1. Supongamos que $a = \vec{OA}$, $b = \vec{OB}$. Consideremos el caso cuando los puntos O, A y B no están situados en la misma recta. Construyamos en los segmentos OA y OB el

paralelogramo $OACB$ (fig. 8). Entonces $|OA| = |BC|$, $(OA) \parallel (BC)$ y $|OB| = |AC|$, $(OB) \parallel (AC)$, como lados

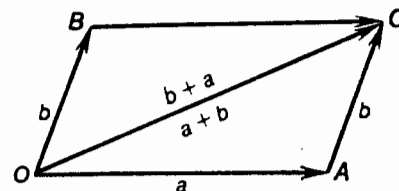


Fig. 8

opuestos del paralelogramo. Por lo tanto, $a = \vec{OA} = \vec{BC}$, $b = \vec{OB} = \vec{AC}$ y, por consiguiente

$$a + b = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}, \quad b + a = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC},$$

lo que demuestra la igualdad (1).

Para el caso, cuando los puntos O, A, B están situados en una misma recta, demuestren las igualdades independientemente (1).

2. Tracemos desde cierto punto O el vector $\vec{OA} = a$, del punto A , el vector $\vec{AB} = b$ y, por último, tracemos el

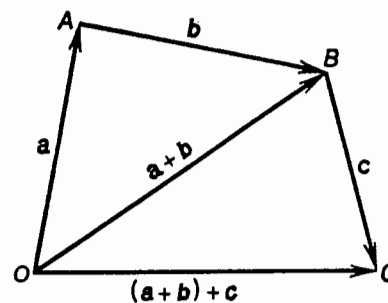


Fig. 9

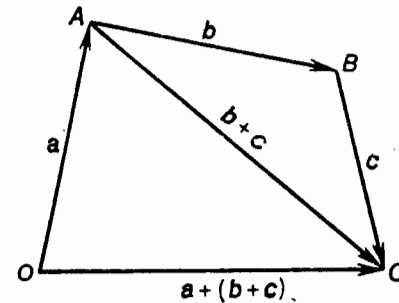


Fig. 10

vector $\vec{BC} = c$ desde el punto B (figs. 9, 10). Unamos con el segmento OC los puntos O y C . Entonces, por un lado, (véase la fig. 9),

$$(a + b) + c = (\vec{OA} + \vec{AB}) + \vec{BC} = \vec{AC} + \vec{OB} = \vec{OC},$$

y, por otro lado, (véase la fig. 10),

$$a + (b + c) = \vec{OA} + (\vec{AB} + \vec{BC}) = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC},$$

lo que demuestra la igualdad (2). ■

De la figura 8 se ve, que la suma de los vectores $a = \vec{OA}$ y $b = \vec{OB}$ es igual a la diagonal dirigida \vec{OC} del paralelogramo $OACB$, construido sobre los segmentos OA y OB , es decir

$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}.$$

Esta igualdad se denomina *regla del paralelogramo* de adición de dos vectores.

Puesto que la adición de los vectores es asociativa, la suma de tres y mayor cantidad de vectores se escribe sin

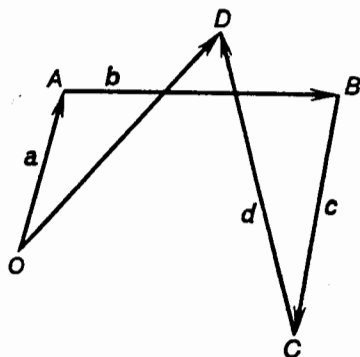


Fig. 11

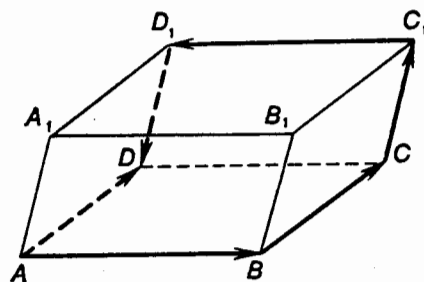


Fig. 12

paréntesis. Por ejemplo, en vez de $(a + b) + c$ o $a + (b + c)$ se escribe $a + b + c$.

Si se requiere hallar la suma de tres o mayor cantidad de vectores, se utiliza la llamada *regla del polígono*. Esta consiste en lo siguiente.

Supongamos que se dan los vectores a, b, c, d y se requiere hallar su suma.

Escojamos cierto punto O (fig. 11) y construyamos tal segmento OA que $\vec{OA} = a$, luego, construyamos tal segmento AB que $\vec{AB} = b$, etc. Sigamos construyendo hasta que no sean agotados todos los vectores sumandos. El segmento

dirigido \vec{OD} que cierra la quebrada obtenida, será igual a la suma de los vectores dados.

Problema 1. Se da el paralelepípedo $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Hállese la suma de los vectores $\vec{AB}, \vec{B_1 C_1}, \vec{CC_1}, \vec{B_1 A_1}, \vec{B_1 B}$ (fig. 12).

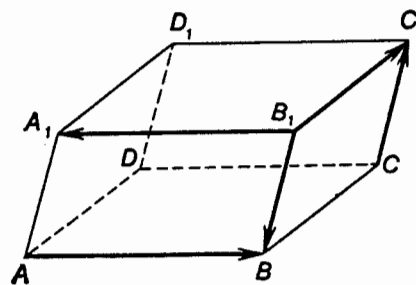


Fig. 15

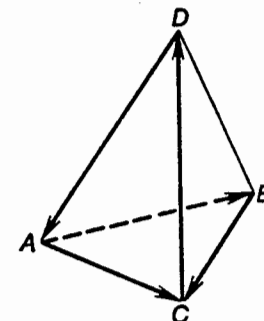


Fig. 14

△ De las propiedades de las aristas del paralelepípedo se deduce, que $\vec{B_1 C_1} = \vec{BC}$, $\vec{B_1 A_1} = \vec{C_1 D_1}$, $\vec{B_1 B} = \vec{D_1 D}$. Por lo tanto

$$\vec{AB} + \vec{B_1 C_1} + \vec{CC_1} + \vec{B_1 A_1} + \vec{B_1 B} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CC_1} + \vec{C_1 D_1} + \vec{D_1 D}.$$

Utilizando la regla del polígono, obtendremos (fig. 13)

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CC_1} + \vec{C_1 D_1} + \vec{D_1 D} = \vec{AD}. \blacktriangle$$

Problema 2. Hállese la suma $\vec{KD} + \vec{MC} + \vec{DM} + \vec{CK}$.

△ Utilizando la propiedad de conmutatividad de la adición de vectores obtenemos

$$\vec{KD} + \vec{MC} + \vec{DM} + \vec{CK} = \vec{KD} + \vec{DM} + \vec{MC} + \vec{CK}.$$

Ahora según la regla del polígono hallamos

$$\vec{KD} + \vec{DM} + \vec{MC} + \vec{CK} = \vec{KK} = 0. \blacktriangle$$

Problema 3. Se da la pirámide triangular $ABCD$ (fig. 14). Hállese la suma $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{AC} + \vec{BC} + \vec{DA}$.

△ Utilizando las propiedades de conmutatividad y de asociatividad de la adición de vectores, obtendremos

$$\begin{aligned} \vec{AB} + \vec{CD} + \vec{AC} + \vec{BC} + \vec{DA} &= \\ &= \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} + \vec{AC} = \vec{AC}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

§ 4. Vectores opuestos. Sustracción de los vectores

Cualesquiera de los dos vectores, cuya suma es igual al vector nulo, se denominan *opuestos*. El vector opuesto al vector a se designa $-a$. Por lo tanto, según la definición

$$a + (-a) = 0.$$

De la definición se deduce que, si $a = \vec{AB}$, $-a = \vec{BA}$, es decir, los vectores opuestos tienen longitudes iguales

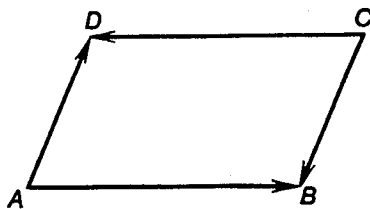


Fig. 15

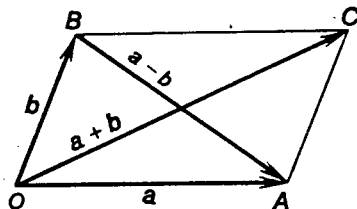


Fig. 16

y direcciones opuestas. Por ejemplo, si $ABCD$ es un paralelogramo, los vectores \vec{AB} y \vec{CD} son opuestos (fig. 15).

Los vectores \vec{AD} y \vec{CB} también son opuestos.

Para cualesquiera de los dos vectores a y b , el vector $c = a + (-b)$ se denomina *diferencia de los vectores a y b* y se designa $a - b$. Así pues, según la definición

$$a - b = a + (-b).$$

Si $a = \vec{OA}$ y $b = \vec{OB}$ (fig. 16), entonces $a - b = \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{BO} = \vec{BO} + \vec{OA} = \vec{BA}$. Por lo tanto,

$$\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}. \quad (1)$$

En la figura se ve que \vec{BA} es una diagonal dirigida del paralelogramo $OACB$, construido sobre los segmentos OA y OB . La otra diagonal \vec{OC} expresa la suma de los vectores \vec{OA} y \vec{OB} .

No es difícil notar que la fórmula (1) puede utilizarse sin recurrir al dibujo: con este propósito es suficiente observar

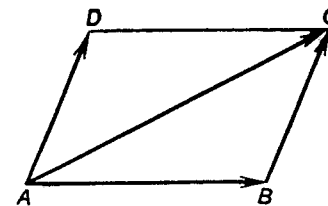


Fig. 17

atentamente el orden de disposición de las letras en la inscripción de los datos y vectores buscados. Así, por ejemplo,

$$\vec{PQ} - \vec{PN} = \vec{NQ}. \quad (2)$$

Problema. Se da tal cuadrilátero $ABCD$, que $\vec{AD} = \vec{AC} - \vec{AB}$. Demuéstrese que $ABCD$ es un paralelogramo. Según la fórmula (2) se tiene

$$\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC}.$$

Por consiguiente, $\vec{BC} = \vec{AD}$ y, por lo tanto, $|\vec{BC}| = |\vec{AD}|$ y $(BC) \parallel (AD)$. De aquí se deduce que $ABCD$ es un paralelogramo (fig. 17). ▲

§ 5. Multiplicación del vector por un número

Se denomina *producto del vector no nulo a por un número $x \neq 0$* el vector, cuya longitud es igual a $|x| \cdot |a|$, y la dirección coincide con la dirección a , si $x > 0$, y opuesta a ésta, si $x < 0$. Se denomina vector nulo el *producto del vector nulo por cualquier número x y el producto de cualquier vector por el número cero*.

El producto del vector a por el número x se designa $x \cdot a$ (el factor numérico se escribe a la izquierda). De acuerdo con la definición $|x \cdot a| = |x| \cdot |a|$ para cualquier vector a y para cualquier número x .

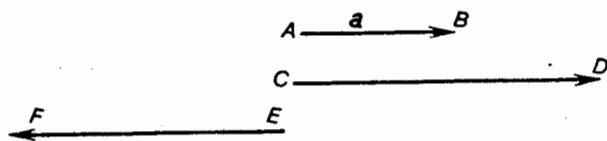


Fig. 18

En la figura 18 está representado el producto del vector a por el número $x = 2$ (vector \vec{CD}) y por el número $x = -2$ (vector \vec{EF}).

La multiplicación del vector por un número tiene las siguientes propiedades:

1. Propiedad de asociatividad:

$$x \cdot (y \cdot a) = (x \cdot y) \cdot a.$$

2. Propiedad de distributividad respecto al factor vectorial:

$$x \cdot a + y \cdot a = (x + y) \cdot a.$$

3. Propiedad de distributividad respecto al factor numérico:

$$x \cdot a + x \cdot b = x \cdot (a + b).$$

□ Si $a = 0$ ó $xy = 0$, la igualdad $x(ya) = (xy)a$ es evidente, ya que a la izquierda y a la derecha se sitúan los vectores nulos.

Sea $a \neq 0$, $xy \neq 0$ y $a = \vec{OA}$. Entonces los vectores $x(y \cdot \vec{OA})$ y $(xy) \vec{OA}$ se sitúan en la recta OA , tienen una longitud de $|x| \cdot |y| \cdot |\vec{OA}|$ y están dirigidos en el mismo sentido: en dirección al vector $a = \vec{OA}$, si $xy > 0$, y en dirección opuesta, si $xy < 0$. Así pues, la propiedad 1 está demostrada.

No vamos a demostrar las propiedades 2 y 3. Señalemos sólo que las propiedades 1 y 2 son las propiedades de los vectores en la recta. Ellas ya fueron demostradas en el curso de geometría de la escuela secundaria de ocho grados. La

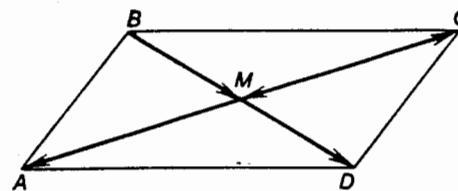


Fig. 19

propiedad 3 es una propiedad de los vectores en el plano, también fue demostrada. ■

Problema. En el paralelogramo $ABCD$ el punto M es un punto de intersección de las diagonales. Hállese el factor k en cada uno de los siguientes casos:

- 1) $\vec{MC} = k \cdot \vec{CA}$; 2) $\vec{BD} = k \cdot \vec{BM}$; 3) $\vec{AC} = k \cdot \vec{CM}$;
- 4) $\vec{BB} = k \cdot \vec{BD}$; 5) $\vec{AA} = k \cdot \vec{CC}$.

△ Conforme a la definición de multiplicación del vector por un número tenemos (fig. 19).

$$1) \vec{MC} \uparrow \downarrow \vec{CA}, |CA| = 2 \cdot |MC|, \text{ de donde } k = -\frac{1}{2};$$

$$2) \vec{BM} \uparrow \uparrow \vec{BD}, |BD| = 2 \cdot |BM|, \text{ de donde } k = 2;$$

$$3) \vec{CM} \uparrow \downarrow \vec{AC}, |CM| = \frac{1}{2} \cdot |AC|, \text{ de donde } k = -2;$$

$$4) \vec{BB} = 0, \vec{BD} \neq 0, \text{ de donde } k = 0;$$

$$5) \vec{AA} = 0, \vec{CC} = 0, \text{ de donde } k \text{ es cualquier número. } \blacktriangle$$

§ 6. Vectores colineales

Dos vectores no nulos, cuyas direcciones coinciden o son opuestas, se denominan *colineales*.

Así, por ejemplo, en la figura 20 los vectores \vec{BC} y \vec{AD} son colineales, y los vectores \vec{AB} y \vec{AC} , no lo son.

Si los vectores a y b son colineales, se dice también que

el vector a es colineal al vector b , y el vector b es colineal al vector a .

El vector nulo se considera colineal a cualquier vector.

Teorema (criterio de colinealidad). *Para que el vector a sea colineal al vector b no nulo, es necesario y suficiente que exista un número k , que satisfaga la condición*

$$a = kb. \quad (1)$$

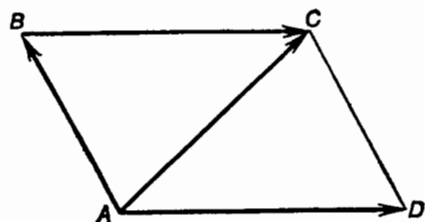


Fig. 20

□ **Suficiencia.** Si para un determinado k la igualdad (1) se cumple, los vectores b y a son colineales de acuerdo con la definición de multiplicación del

vector por un número y la definición de los vectores colineales.

Necesidad. Supongamos que el vector a es colineal al vector b no nulo. Son posibles los siguientes tres casos: $a \uparrow\uparrow b$, $a \downarrow\uparrow b$, $a = 0$.

Si $a \uparrow\uparrow b$, $a = \frac{|a|}{|b|} \cdot b$, es decir, la igualdad (1) es válida con $k = \frac{|a|}{|b|}$.

Si $a \downarrow\uparrow b$, $a = -\frac{|a|}{|b|} \cdot b$, es decir, la igualdad (1) es válida para $k = -\frac{|a|}{|b|}$.

Si $a = 0$, $a = 0 \cdot b$, es decir, la igualdad (1) es válida para $k = 0$. ■

Problema. Demostrar que los vectores $\vec{AB} + \vec{CB} + 2\vec{BA}$ y $\frac{1}{3} \vec{AC}$ son colineales.

△ Utilizando las propiedades de las operaciones aplicadas a los vectores, obtendremos

$$\begin{aligned} \vec{AB} + \vec{CB} + 2\vec{BA} &= (\vec{AB} + \vec{BA}) + (\vec{CB} + \vec{BA}) = \\ &= 0 + \vec{CA} = \vec{CA} = -\vec{AC}. \end{aligned}$$

Así pues, $\vec{AB} + \vec{CB} + 2\vec{BA} = -3 \left(\frac{1}{3} \vec{AC} \right)$. De acuerdo con el criterio de colinealidad de los vectores, los vectores dados en las condiciones del problema son colineales. ▲

§ 7. Ángulo entre dos vectores

Examinemos la noción de ángulo entre dos direcciones en el espacio. En el curso de geometría para el 6-to, 7-mo y 8-vo grados fue considerada la noción de dirección en el plano.

Al igual que en el plano, en el espacio se denomina dirección el conjunto de todos los rayos, cada uno de los cuales

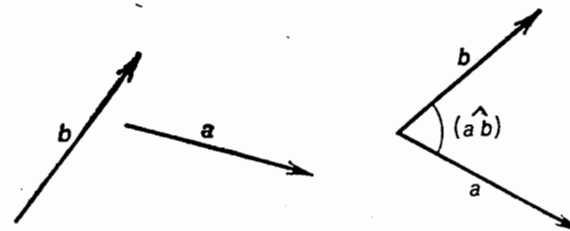


Fig. 21

está codirigido con el dado. Así pues, cualquier rayo del conjunto dado de los rayos codirigidos determina completamente esta dirección (lo mismo que cualquier segmento dirigido determina por completo el vector que él representa). Por lo tanto, la dirección en el espacio se da comúnmente por medio de un solo rayo.

Se denomina *ángulo entre dos direcciones* la magnitud del ángulo menor entre cualesquiera rayos de estas direcciones, que tienen un origen común.

El ángulo entre los rayos l_1 y l_2 se denota $(l_1; l_2)$.

Según la definición, el ángulo entre dos direcciones está comprendido en el intervalo $[0^\circ; 180^\circ]$.

Se denomina *ángulo entre dos vectores no nulos*, el ángulo entre las direcciones de estos vectores. El ángulo entre

los vectores a y b (fig. 21) se denota $(a; b)$.

Si el ángulo entre los vectores a y b es igual a 90° , estos vectores se denominan *perpendiculares* (u *ortogonales*) y se escribe: $a \perp b$.

Señalemos que si $a \uparrow\uparrow b$, $(a; b) = 0^\circ$ y si $a \downarrow\uparrow b$, $(a; b) = 180^\circ$.

Examinemos cierta recta l , en la cual está eligida una unidad de medida de longitud. Supongamos que A y B

son ciertos puntos en la recta l , tales que $|AB| = 1$. Entonces, los vectores \vec{AB} y \vec{BA} se denominan versores de la recta l (fig. 22).

Los versores de la recta dan en ésta dos direcciones. Una de ellas se denomina *positiva*, y la otra, *negativa*.

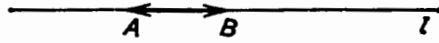


Fig. 22



Fig. 23

Se denomina *eje* la recta en la cual es elegido el punto O (origen de la cuenta) y son dadas la dirección positiva y la unidad de medida de la longitud. Se denomina *versor del eje*

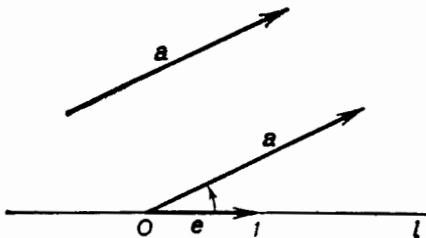


Fig. 24

(fig. 23) el vector e ($|e| = 1$) que determina la dirección del eje.

Se denomina *ángulo entre el vector y el eje*, la magnitud del ángulo entre la dirección del eje y la dirección del vector (fig. 24).

§ 8. Desarrollo del vector en el plano en dos vectores no colineales

Supongamos que los vectores a y b son no colineales. Entonces, si los números x y y satisfacen la condición

$$x \cdot a + y \cdot b = 0, \quad (1)$$

$x = 0$ y $y = 0$.

□ Efectivamente, si, por ejemplo, $x \neq 0$, de (1) se deduce que

$$a = -\frac{y}{x} \cdot b.$$

Esto contradice a que los vectores a y b son no colineales. De este modo, $x = 0$.

De manera análoga se muestra que $y = 0$. ■

Se dice que el vector a es una combinación lineal de los vectores $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, si puede ser expresado en la forma

$$a = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n,$$

donde x_1, x_2, \dots, x_n son ciertos números.

Así, el vector $a = 3a_1 - 5a_2 + \frac{1}{2}a_3$ es una combinación lineal de los vectores a_1, a_2 y a_3 .

Teorema. *Cualquier vector m en el plano puede ser definido, además, de un modo único, en forma de combinación lineal de cualesquiera dos vectores no colineales a y b ;*

$$m = x \cdot a + y \cdot b. \quad (2)$$

□ Si el vector m es colineal a uno de los vectores a y b (por ejemplo, al vector a), entonces para cierto número m tenemos $m = x \cdot a = x \cdot a + 0 \cdot b$. De este modo, el vector m está representado en la forma (2).

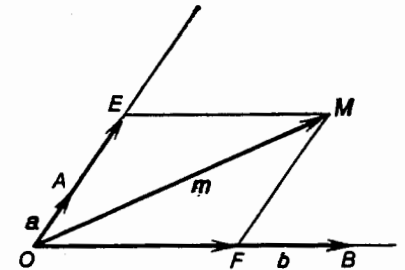


Fig. 25

Si el vector m no es colineal al vector a ni al vector b (fig. 25), entonces, al trazar a través del punto M las rectas, paralelas a $[OB)$ y $[OA)$, tenemos $m = \vec{OE} + \vec{OF}$. Pero, según el criterio de colinealidad de los vectores existen tales números x y y , que $\vec{OE} = xa$, $\vec{OF} = yb$, de donde se desprende la igualdad (2).

Demostremos la unicidad de tal representación. Sea que

$$m = x_1 a + y_1 b \quad \text{y} \quad m = x_2 a + y_2 b.$$

Entonces $(x_1 - x_2) a + (y_1 - y_2) b = 0$. Pero puesto que los vectores a y b son no colineales, la igualdad es posible

sólo cuando $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$. La unicidad está demostrada. ■

Si un vector está representado como una combinación lineal de ciertos vectores se dice, que *el vector está desarrollado según estos vectores*.

Se denomina *base en el plano* cualesquiera dos vectores no colineales de este plano, tomados en un orden determinado.

Sea que e_1 y e_2 es cierta base y a , un vector arbitrario, entonces según el teorema demostrado existen dos números x y y tales que

$$a = xe_1 + ye_2.$$

Los números x e y se denominan *coordenadas del vector a en la base dada*. En este caso se escribe $a = (x; y)$.

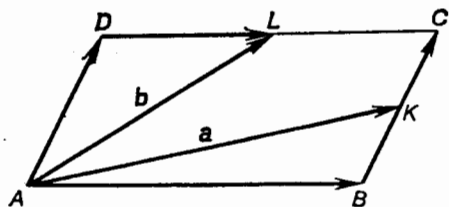


Fig. 26

Problema 1. Los puntos K y L son los puntos medios de los lados BC y CD del paralelogramo $ABCD$. Desarrollese el vector \vec{BC} en los vectores $a = \vec{AK}$ y $b = \vec{AL}$.

△ De $\triangle AKB$ (fig. 26) tenemos que

$$\vec{AB} + \frac{\vec{BC}}{2} = a. \quad (1)$$

De $\triangle ADL$ obtenemos $\vec{AD} + \vec{DL} = b$. Puesto que $\vec{AD} = \vec{BC}$, $\vec{DL} = \frac{\vec{AB}}{2}$, entonces

$$\vec{BC} + \frac{\vec{AB}}{2} = b. \quad (2)$$

De la igualdad (1) se deduce que

$$\frac{\vec{AB}}{2} + \frac{\vec{BC}}{4} = \frac{a}{2} \quad \text{ó} \quad \frac{\vec{AB}}{2} = \frac{a}{2} - \frac{\vec{BC}}{4}. \quad (3)$$

Sustituyendo $\frac{\vec{AB}}{2}$ de (3) en (2), obtendremos

$$\vec{BC} + \frac{a}{2} - \frac{\vec{BC}}{4} = b, \quad \text{ó} \quad \frac{3}{4}\vec{BC} = b - \frac{a}{2}$$

y, por lo tanto,

$$\vec{BC} = \frac{4}{3}b - \frac{2}{3}a = -\frac{2}{3}a + \frac{4}{3}b. \quad \blacktriangle$$

Problema 2. Se da el $\triangle ABC$, $D \in [BC]$, $|BD| = |DC|$, $[BM]$ es una mediana del triángulo ABC . Hállense las coor-

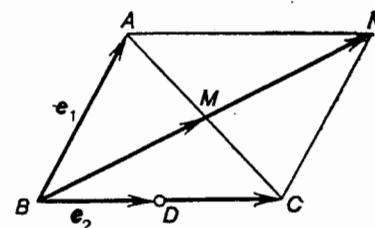


Fig. 27

denadas del vector \vec{BM} , si los segmentos dirigidos \vec{BA} y \vec{BD} definen los vectores básicos.

△ Transformemos el $\triangle ABC$ en el paralelogramo $ABCN$ (fig. 27). Entonces $\vec{BN} = 2\vec{BM} = \vec{BA} + \vec{BC}$. Designando $\vec{BA} = e_1$, $\vec{BD} = e_2$, obtendremos $2\vec{BM} = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2$, de donde $\vec{BM} = \frac{1}{2} \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$.

Así pues, en la base dada $\vec{BM} = \left(\frac{1}{2}; 1\right)$. ■

§ 9. Vectores coplanares

Del curso de geometría para secundaria básica se sabe que la recta es paralela al plano, si no tiene puntos comunes con este plano o está situada en éste.

El vector \vec{AB} lo denominaremos *paralelo al plano*, si la recta AB es paralela a este plano. El vector nulo se considera paralelo a cualquier plano.

Los vectores a_1, a_2, \dots, a_n se denominan *coplanares* si cada uno de ellos es paralela a un mismo plano.

Cualesquiera dos vectores son siempre coplanares.

Es evidente, que si tres vectores son coplanares, entonces pueden ser representados por medio de segmentos dirigidos, situados en un mismo plano.

Examinemos la adición de tres vectores no coplanares según la llamada «regla del paralelepípedo».

Sea que los vectores a , b y c son no coplanares (fig. 28). Tracemos de un punto arbitrario O los vectores $\vec{OA} = a$, $\vec{OB} = b$ y $\vec{OC} = c$ y construyamos el paralelepípedo para

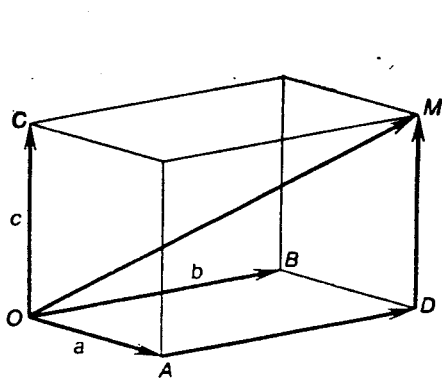


Fig. 28

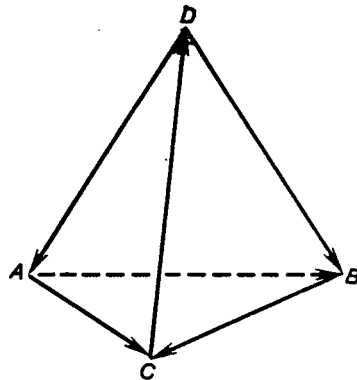


Fig. 29

el cual $[OA]$, $[OB]$ y $[OC]$ sirven de aristas. Sea que $[OM]$ es una diagonal de este paralelepípedo. Puesto que $\vec{OB} = \vec{AD}$ y $\vec{OC} = \vec{DM}$

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AD} + \vec{DM} = \vec{OM},$$

es decir, $a + b + c = \vec{OM}$.

Así pues, la suma de tres vectores no coplanares es igual al vector representado por medio de una diagonal dirigida del paralelepípedo, construido sobre estos vectores.

Problema. Dar ejemplos de las aristas de la pirámide triangular $ABCD$ que representan: a) dos vectores colineales; b) tres vectores coplanares; c) tres vectores no coplanares.

△ Examinemos la imagen de una pirámide (fig. 29). Utilizando las definiciones de los vectores colineales y coplanares obtendremos:

a) ningún par de aristas distintas de la pirámide puede representar los vectores colineales, ya que entre ellas no hay aristas recíprocamente paralelas;

b) las aristas AC , CB , BA (o las aristas AD , DC y AC) representan tres vectores coplanares (por ejemplo, los vectores \vec{AC} , \vec{AB} y \vec{BC});

c) las aristas DA , DC y DB representan tres vectores no coplanares (por ejemplo, los vectores \vec{DA} , \vec{CD} , \vec{DB}). ▲

§ 10. Desarrollo del vector en tres vectores no coplanares

Teorema. Cualquier vector m puede ser representado, además, de un modo único, en forma de una combinación lineal de cualesquiera tres vectores no coplanares a , b y c :

$$m = xa + yb + zc. \quad (1)$$

□ Ante todo señalemos, que ningún par de vectores de los vectores a , b , c es colineal; de lo contrario, los vectores

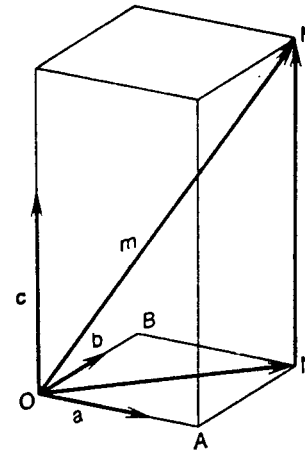


Fig. 30

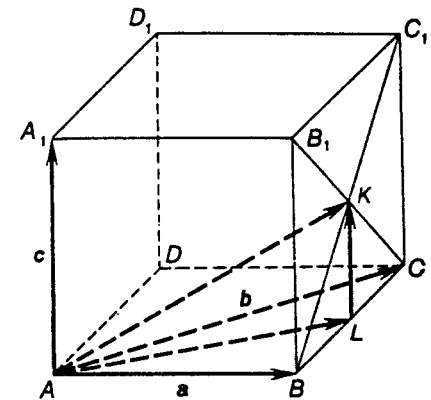


Fig. 31

a , b , c serían coplanares. Por lo tanto, si el vector m es coplanar con cualquiera de los dos vectores (por ejemplo, con a y b), entonces $m = xa + yb$ (§ 8) y, por consiguiente,

$$m = xa + yb + 0 \cdot c,$$

es decir, en este caso el teorema está demostrado.

Sea que el vector m no es coplanar con ningún par de vectores de los vectores a, b, c (fig. 30). Reduzcamos todos los vectores al origen común O y tracemos a través del punto M (el extremo del segmento dirigido que expresa el vector $\vec{OM} = m$) una recta paralela al vector c . Dicha recta cortará el plano OAB en cierto punto N . Claro está, que $\vec{OM} = \vec{ON} + \vec{NM}$.

Según la propiedad de los vectores colineales $\vec{NM} = zc$. Según el teorema del desarrollo del vector en dos vectores no colineales existen tales números x, y , que $ON = xa + yb$.

Así pues,

$$\vec{OM} = \vec{ON} + \vec{NM} = xa + yb + zc.$$

La unicidad del desarrollo del vector m en los vectores a, b y c se demuestra de una manera análoga a como fue hecho en el teorema del desarrollo del vector en dos vectores no colineales (§ 8). ■

Se denomina *base del espacio* cualesquiera tres vectores no coplanares, tomados en un orden determinado.

Spongamos que e_1, e_2 y e_3 son cierta base y a , un vector arbitrario. Entonces, según el teorema que acabamos de demostrar, existen tres números x, y, z tales que

$$a = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

Los números x, y y z se denominan *coordenadas del vector a en la base dada*. En este caso se escribe $a = (x; y; z)$.

Problema 1. Se da el cubo $ABCD_1B_1C_1D_1$. Desarrollar el vector \vec{AK} , donde K es el centro de la cara BCC_1B_1 , en los vectores $a = \vec{AB}, b = \vec{AC}, c = \vec{AA}_1$ (fig. 31).

△ Del triángulo AKL tenemos $\vec{AK} = \vec{AL} + \vec{LK}$, pero

$$\vec{AL} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2} = \frac{a+b}{2}, \quad \text{y} \quad \vec{LK} = \frac{\vec{AA}_1}{2} = \frac{c}{2}.$$

Por consiguiente,

$$\vec{AK} = \frac{a+b}{2} + \frac{c}{2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c. \quad \blacktriangle$$

Problema 2. Sea que los vectores $\vec{DA}, \vec{DB}, \vec{DC}$ representados por las respectivas aristas dirigidas de la pirámide

triangular $ABCD$, forman una base. Hállense las coordenadas del vector \vec{AB} en esta base.

△ Hagamos uso de la figura 29. Designando $\vec{DA} = e_1, \vec{DB} = e_2, \vec{DC} = e_3$, obtendremos $\vec{AB} = \vec{DB} - \vec{DA} = -e_1 + e_2$ ó $\vec{AB} = -1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$, de donde $\vec{AB} = (-1; 1; 0)$. ■

§ 11. Operaciones con los vectores definidos por sus coordenadas

Si los vectores están definidos por sus coordenadas en la base e_1, e_2, e_3 , las operaciones con ellos se cumplen según las siguientes reglas:

1. En caso de adicionar dos (o mayor número) vectores sus respectivas coordenadas se suman:

$$(x_1; y_1; z_1) + (x_2; y_2; z_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2).$$

□ Efectivamente, para dos vectores $(x_1; y_1; z_1)$ y $(x_2; y_2; z_2)$ tenemos

$$\begin{aligned} (x_1; y_1; z_1) + (x_2; y_2; z_2) &= (x_1e_1 + y_1e_2 + z_1e_3) + \\ &+ (x_2e_1 + y_2e_2 + z_2e_3) = (x_1 + x_2)e_1 + \\ &+ (y_1 + y_2)e_2 + (z_1 + z_2)e_3 = \\ &= (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2). \end{aligned}$$

Para la suma de tres o mayor número de vectores la demostración se realiza de manera análoga. ■

2. En caso de sustraer los vectores sus coordenadas respectivas se sustraen:

$$(x_1; y_1; z_1) - (x_2; y_2; z_2) = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2).$$

Hágase la demostración de una manera independiente. 3. En caso de multiplicar el vector por un número todas sus coordenadas se multiplican por este número.

□ De hecho, para el vector $(x_1; y_1; z_1)$ y el número λ tenemos

$$\begin{aligned} \lambda(x_1; y_1; z_1) &= \lambda(x_1e_1 + y_1e_2 + z_1e_3) = \\ &= (\lambda x_1)e_1 + (\lambda y_1)e_2 + (\lambda z_1)e_3 = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Problema. Hállense las coordenadas de los vectores $a + b; a - b; 5a; 3b - \frac{a}{2}$ por las coordenadas de los vectores $a = (-4; 6; 0)$, $b = (1; -1; 7)$.

Δ Utilizando las reglas 1, 2 y 3 obtenemos:
 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (-3; 5; 7)$; $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (-5; 7; -7)$; $5\mathbf{a} =$
 $= (-20; 30; 0)$; $3\mathbf{b} - \frac{\mathbf{a}}{2} = (5; -6; 21)$. \blacktriangle

§ 12. Sistema cartesiano de coordenadas

Sea que en el espacio se dan dos puntos arbitrarios distintos O y M y supongamos que uno de ellos, por ejemplo, el punto O , está elegido como punto de origen. Entonces el

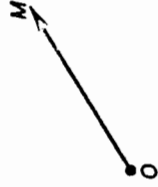


Fig. 32

vector \vec{OM} se denomina *radio vector* del punto M respecto al punto O (fig. 32).

Sea que en el espacio se da el punto O y cierta base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. El conjunto de esta base y el punto O se denomina

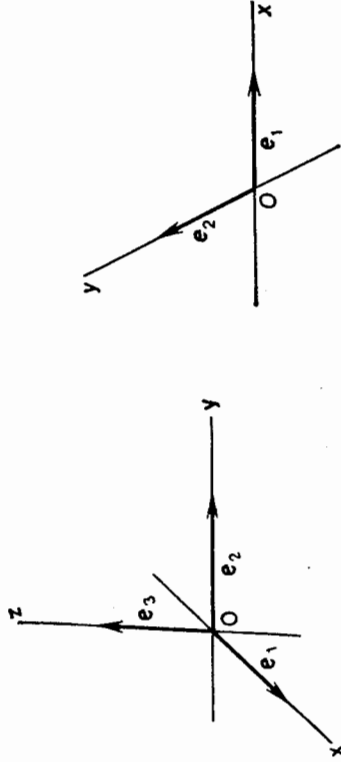


Fig. 33

sistema cartesiano de las coordenadas $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. El punto O se denomina *origen de coordenadas*.

Si a través del punto O se trazan las rectas en direcciones definidas por los vectores básicos $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ y \mathbf{e}_3 , entonces las rectas obtenidas se denominan *ejes de coordenadas* (fig. 33);

la recta Ox , *eje de abscisas*, la recta Oy , *eje de ordenadas* y la recta Oz , *eje de z-coordenadas*.

Las coordenadas del radio vector del punto M se denominan coordenadas de este punto en el sistema de coordenadas dado (x es la abscisa, y , la ordenada, z , la z -coordenada).

Análogamente se determina el sistema cartesiano de coordenadas $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ en el plano (este es un punto arbitrario fijado O y cierta base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ en el plano) (fig. 34).

Las coordenadas del punto M se escriben por lo común al lado de la letra que lo denotan: $M(x; y)$ en el plano y $M(x; y; z)$ en el espacio.

Es evidente, que un sistema cartesiano de coordenadas en el espacio permite establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos del espacio y las ternas de números ordenadas, y en el plano, una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y los pares de números ordenados.

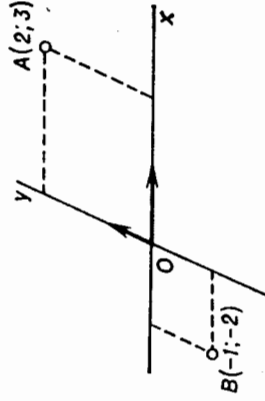


Fig. 35

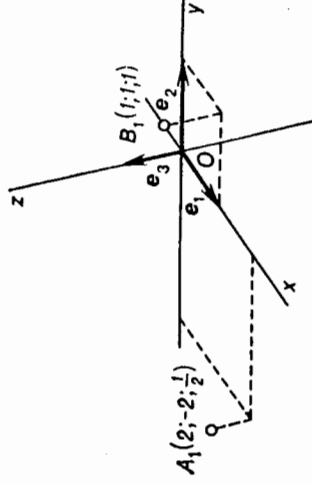


Fig. 36

Por ejemplo, al punto A (fig. 35) le corresponde el par ordenado de los números (2; 3); al punto A_1 (fig. 36), la terna ordenada de los números (2; -2; $\frac{1}{2}$). Al par ordenado de los números (-1; -2) le corresponde el único punto B del plano (fig. 35) y a la terna ordenada de los números (1; 1; 1), el único punto B_1 del espacio (fig. 36).

Sea que en el sistema de coordenadas O, e_1, e_2, e_3 está definido un cierto vector \vec{AB} (fig. 37). Entonces, $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$. Supongamos que las coordenadas de los puntos A y B son respectivamente iguales a $(x_1; y_1; z_1)$ y $(x_2; y_2; z_2)$.

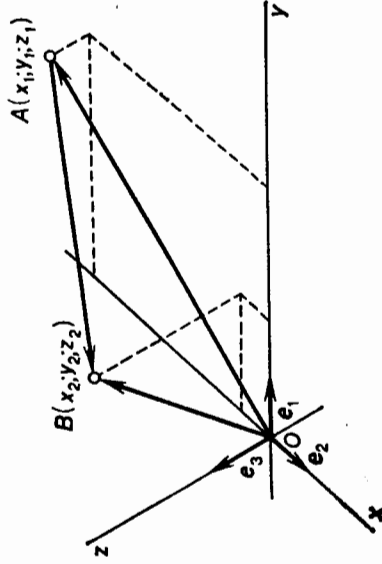


Fig. 37

$y_2; z_2$). Entonces, según la propiedad de sustracción de los vectores, definidos por sus coordenadas, obtenemos

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

De esta forma, para hallar las coordenadas de cierto vector, es suficiente sustraer de las coordenadas de su extremo las coordenadas homónimas de su origen.

Problema 1. Hállense las coordenadas del vector \vec{AB} , si $A(5; -7; 0,5)$ y $B(2; -1; 2,5)$.

Δ Sea que $\vec{AB} = (x; y; z)$. Entonces, $x = 2 - 5 = -3$; $y = -1 - (-7) = 6$; $z = 2,5 - 0,5 = 2$.

Así pues, $\vec{AB} = (-3; 6; 2)$. \blacktriangle

Si los vectores e_1, e_2 y e_3 que forman la base, son vectores unitarios perpendiculares de dos en dos, el sistema de coordenadas O, e_1, e_2, e_3 se denomina *sistema cartesiano rectangular de coordenadas en el espacio*.

De forma análoga, si los vectores unitarios básicos e_1 y e_2 son recíprocamente perpendiculares, el sistema de coordenadas O, e_1, e_2 se denomina *sistema cartesiano rectangular de coordenadas en el plano*.

Los vectores unitarios básicos del sistema cartesiano rectangular de coordenadas se denotan comúnmente con las letras i, j y k .

El desarrollo del vector $a = \vec{OM}$ (fig. 38) del espacio en los vectores i, j y k se escribe en la forma

$$a = xi + yj + zk.$$

En este caso se dice que el vector a está desarrollado en

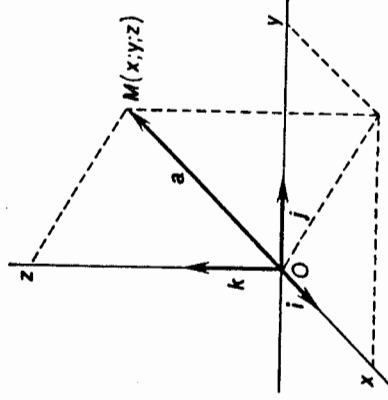


Fig. 38

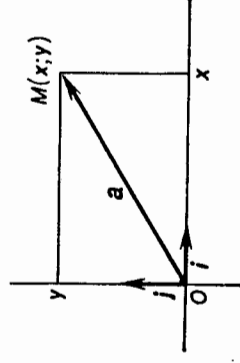


Fig. 39

vectores unitarios (versores) en una base cartesiana rectangular del espacio.

El desarrollo del vector a (fig. 39) en los vectores i y j en una base cartesiana rectangular del plano se escribe en la forma

$$a = xi + yj.$$

En los párrafos 10 y 8 fue demostrado que tal desarrollo del vector es siempre posible y único.

Problema 2. Hállense el desarrollo de los vectores \vec{OM}_1 y \vec{M}_1N en la base cartesiana rectangular ilustrada en la figura 40 (el punto M_1 es la proyección del punto M sobre el plano xOy).

Δ Puesto que el punto M_1 es la proyección del punto M sobre el plano $xOy, M_1(3; 4; 0)$. Por lo tanto

$$\vec{OM}_1 = 3i + 4j + 0 \cdot k.$$

Hallemos por ahora las coordenadas del vector $\vec{M_1N}$ en la base dada: $\vec{M_1N} = (-4 - 3; -3,5 - 4; 2 - 0)$,

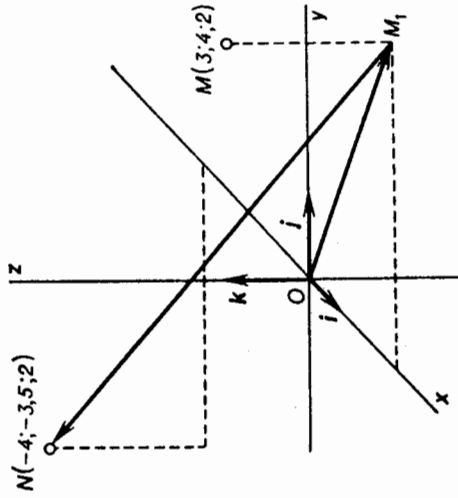


Fig. 40

es decir, $\vec{M_1N} = (-7; -7,5; 2)$. Por consiguiente, $\vec{M_1N} = -7i - 7,5j + 2k$. ▲

§ 13. Transformación de un sistema cartesiano rectangular de coordenadas en otro

La correspondencia biunívoca entre los puntos del espacio y los pares ordenados de números reales se establece mediante la elección del sistema cartesiano rectangular de coordenadas. Esto quiere decir, que a cada punto del plano le corresponde un único par de números y a cada par ordenado de números reales le corresponde un único punto.

La elección de tal o cual sistema de coordenadas no está limitada por nada y se determina en cada caso concreto sólo por motivos de comodidad. Frecuentemente un mismo conjunto se examina en distintos sistemas de coordenadas. Es evidente, que un mismo punto tiene distintas coordenadas en los diversos sistemas. Un conjunto de puntos (en particular, la circunferencia, la parábola, la recta) se define por distintas ecuaciones en diferentes sistemas de coordenadas.

Aclaremos, cómo se transforman las coordenadas de los puntos del plano en caso de transformación de un sistema de coordenadas en otro.

Sea que en el plano se dan dos sistemas rectangulares de coordenadas: O, i, j y O', i', j' (fig. 41). Convengamos en denominar viejo el primer sistema, que tiene como origen el punto O y como vectores básicos los vectores i y j , y nuevo, el segundo sistema, que tiene como origen el punto O' y como vectores básicos los vectores i' y j' .

Consideremos como conocida la posición del nuevo sistema respecto al viejo: sea que el punto O' en el sistema viejo tiene las coordenadas $(a; b)$, y el vector i' forma un ángulo α con el vector i . El ángulo se cuenta en sentido antihorario.

Examinemos un punto arbitrario M . Designemos como $(x; y)$ sus coordenadas en el sistema viejo y como $(x'; y')$, en el sistema nuevo. Nuestra tarea consiste en establecer una dependencia entre las coordenadas viejas y nuevas del punto M .

Unamos de dos en dos los puntos O y O' , O' y M , O y M . Según la regla del triángulo obtenemos

$$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}. \quad (1)$$

Desarrollemos en vectores básicos i y j , los vectores \vec{OM} y $\vec{OO'}$, y en vectores i' y j' , el vector $\vec{O'M}$:

$$\vec{OM} = xi + yj, \quad \vec{OO'} = ai + bj, \quad \vec{O'M} = x'i' + y'j'.$$

Ahora se puede escribir la igualdad (1) así:

$$xi + yj = (ai + bj) + (x'i' + y'j'). \quad (2)$$

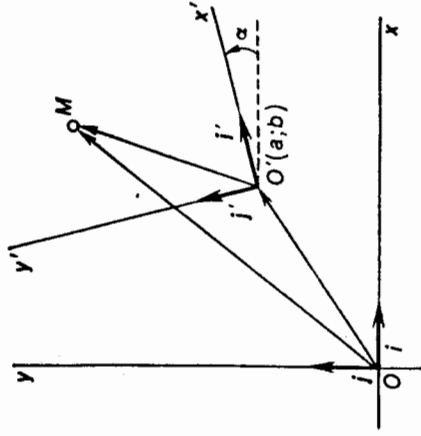


Fig. 41

Los vectores básicos nuevos i' y j' se desarrollan en vectores básicos viejos i y j del modo siguiente:

$$i' = \cos \alpha i + \sin \alpha j, \quad j' = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) i + \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) j = -\sin \alpha i + \cos \alpha j.$$

Sustituyendo las expresiones halladas para i' y j' en la fórmula (2), obtendremos la igualdad vectorial

$$xi + yj = ai + bj + x'(\cos \alpha i + \sin \alpha j) + y'(-\sin \alpha i + \cos \alpha j),$$

que es equivalente a las igualdades numéricas:

$$\begin{cases} x = a + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = b + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases} \quad (3)$$

Las fórmulas (3) ofrecen las expresiones buscadas para las coordenadas viejas x e y del punto a través de sus nuevas coordenadas. A fin de hallar las expresiones para las nuevas coordenadas a través de las viejas, es suficiente resolver el sistema de ecuaciones (3) respecto a las incógnitas x' y y' .

Así pues, cuando se traslada el origen de coordenadas al punto $(a; b)$ y se giran los ejes en el ángulo α , las coordenadas de los puntos se transforman según la fórmula (3). Si cambia solamente el origen de coordenadas, y las direcciones de los ejes quedan invariables, suponiendo $\alpha = 0$ en las fórmulas (3), obtenemos

$$\begin{cases} x = a + x' \\ y = b + y'. \end{cases} \quad (4)$$

Estas fórmulas se denominan brevemente *fórmulas de traslado*.

Si el origen de coordenadas queda intacto y los ejes giran en el ángulo α suponiendo en las fórmulas (3) $a = b = 0$, obtenemos

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases} \quad (5)$$

Las fórmulas (5) se denominan *fórmulas de giro*.

Problema 1. Sea que las coordenadas del nuevo origen son (2; 3) en el sistema viejo, y las coordenadas del pun-

to A son (4; -1) en el sistema viejo. Hállense las coordenadas del punto A en el sistema viejo, si las direcciones de los ejes quedan invariables.

△ De acuerdo con la fórmulas (4) tenemos

$$\begin{cases} 4 = 2 + x', \\ -1 = 3 + y'. \end{cases}$$

Por consiguiente,

$$\begin{cases} x' = 2, \\ y' = -4. \end{cases}$$

Resultado. $A(2; -4)$. ▲

Problema 2. Sea que las coordenadas del punto P son (-2; 1) en el sistema viejo y (5; 3) en el nuevo sistema, en el cual las direcciones de los ejes son las mismas.

△ Según la fórmula (4) obtenemos

$$\begin{cases} -2 = a + 5, \\ 1 = b + 3, \end{cases}$$

de donde $a = -7$, $b = -2$.

Resultado. $(-7; -2)$. ▲

Problema 3. Las coordenadas del punto A son (4; 2) en el nuevo sistema. Hállense las coordenadas de este punto en el sistema viejo, si el origen de coordenadas quedó invariable, y los ejes de coordenadas del sistema viejo están giradas en el ángulo $\alpha = 45^\circ$.

△ Según las fórmulas (5) hallamos

$$\begin{cases} x = 4 \cos 45^\circ - 2 \sin 45^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \\ y = 4 \sin 45^\circ + 2 \cos 45^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}. \end{cases}$$

Resultado. $A(\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$. ▲

Problema 4. Las coordenadas del punto A son $(2\sqrt{3}; -\sqrt{3})$ en el viejo sistema. Hállense las coordenadas de este punto en el nuevo sistema, si el origen de coordenadas del viejo sistema se trasladó al punto $(-1; -2)$, y los ejes están girados en un ángulo $\alpha = 30^\circ$.

△ Según las fórmulas (3) tenemos

$$\begin{cases} 2\sqrt{3} = -1 + x' \cos 30^\circ - y' \sin 30^\circ, \\ -\sqrt{3} = -2 + x' \sin 30^\circ + y' \cos 30^\circ, \end{cases}$$

6

$$\begin{cases} 2\sqrt{3} = -1 + x' \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - y' \cdot \frac{1}{2}, \\ -\sqrt{3} = -2 + x' \cdot \frac{1}{2} + y' \cdot \frac{3}{2}, \end{cases}$$

6

$$\begin{cases} \sqrt{3}x' - y' = 4\sqrt{3} + 2, \\ x' + \sqrt{3}y' = 4 - 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones respecto a x' y y' , hallamos: $x' = 4$, $y' = -2$.

Resultado. A (4; -2). ▲

Problema 5. Se da la ecuación de la recta $y = 2x - 6$. Hállese la ecuación de la misma recta en el nuevo sistema de coordenadas, obtenido del viejo sistema mediante el giro de los ejes en un ángulo de $\alpha = 45^\circ$.

△ En este caso las fórmulas de giro tienen la forma

$$\begin{cases} x = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ, \\ y = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ, \end{cases}$$

es decir

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'). \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta $y = 2x - 6$ las variables viejas x y y por las nuevas, obtendremos la ecuación

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') - 6,$$

que tras las simplificaciones toma la forma

$$y' = \frac{x'}{3} - 2\sqrt{2}. \blacktriangle$$

40

§ 14. Sistema polar de coordenadas

Familiaricémonos con un método más de determinación de la posición del punto en el plano por medio de los números, es decir, con el sistema polar de coordenadas.

Examinemos en el plano el eje l con un vector unitario e y con un punto de referencia O (fig. 42).

Sea que M es un punto arbitrario del plano, que no coincide con el punto O . Entonces \vec{OM} es el radio vector del

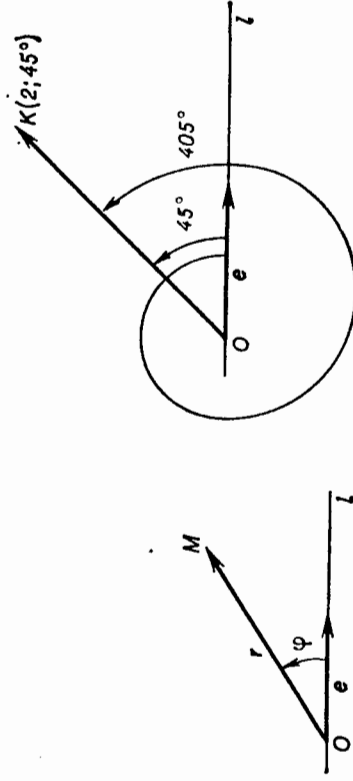


Fig. 42

Fig. 43

punto M respecto al punto O . Sea que r es una longitud del vector \vec{OM} , es decir, $|\vec{OM}| = r$ y φ es el ángulo entre el eje l y el radio vector \vec{OM} . Calculemos el ángulo $\varphi = (e; \vec{OM})$ desde el eje l en sentido positivo, es decir, en sentido antihorario.

Los números r y φ se denominan *coordenadas polares* del punto M : r es *un radio polar*, φ , *un ángulo polar*.

El eje l se denomina *eje polar* y el punto O , *polo*.

El radio polar del punto O se considera igual a cero, el ángulo polar del punto O no se define.

Si el punto M tiene las coordenadas polares r y φ , entonces se escribe $M(r; \varphi)$. Por ejemplo, el punto K (fig. 43) tiene las coordenadas $r = 2$, $\varphi = 45^\circ$, es decir, $K(2; 45^\circ)$.

Es evidente, que la posición del punto en el plano se define por completo por medio de sus coordenadas polares.

41

Si $r > 0$ y φ es un número arbitrario, existe un solo punto M tal que

$$|\overrightarrow{OM}| = r \quad \text{y} \quad \widehat{e; OM} = \varphi.$$

Si $r = 0$ el punto coincide con el polo.

Es de señalar, que el ángulo polar del punto que no coincide con el polo se define no unívocamente. Por ejemplo, es ángulo polar para el punto K (ver fig. 43) no sólo el ángulo $\varphi = 45^\circ$, sino también, el ángulo $\varphi = 405^\circ$ y, en general, cualquier ángulo $\varphi = 45^\circ + 360^\circ k$, donde $k \in \mathbb{Z}$.

El ángulo polar de un punto se define con una precisión hasta un sumando, múltiple a 360° . Si $r > 0$, los pares de números $(r; \varphi)$ y $(r; \varphi + 360^\circ k)$, donde $k \in \mathbb{Z}$, definen un mismo punto del plano. Para que la correspondencia entre los puntos del plano (a excepción del polo) y sus coordenadas polares sea biunívoca, al ángulo polar se pone un límite $0 \leq \varphi < 360^\circ$.

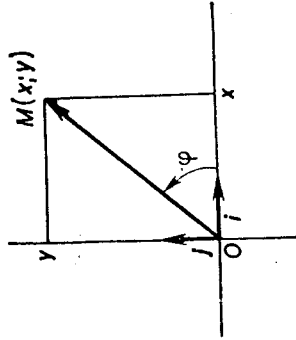


Fig. 44

Establezcamos una relación entre las coordenadas cartesianas polares y rectangulares de un mismo punto M del plano.

Sea que en el plano está definido un sistema cartesiano rectangular de coordenadas O, i, j (fig. 44). Tomemos como origen de coordenadas, o sea, como polo el punto O y como eje polar l , el eje de abscisas. Entonces el rayo $[Oy)$ del eje de ordenadas está orientado bajo un ángulo de 90° respecto al eje l .

Es evidente que las coordenadas cartesianas del punto M se expresan a través de sus coordenadas polares de la manera siguiente:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (1)$$

Las fórmulas (1) permiten hallar las coordenadas cartesianas rectangulares del punto por sus coordenadas polares. De la fórmula (1) obtenemos

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2,$$

y por consiguiente,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2)$$

Si $r \neq 0$ (M no coincide con el punto O), de (1) y (2) se deduce que

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{sen } \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (3)$$

Las fórmulas (2), (3) permiten pasar de las coordenadas cartesianas rectangulares del punto a sus coordenadas polares.

Problema 1. Hállense las coordenadas del punto $M(-1; \sqrt{3})$.

Δ Por la fórmula (2) hallamos $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. Según las fórmulas (3) tenemos

$$\cos \varphi = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}, \quad \text{sen } \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

de donde $\varphi = 120^\circ$. Así pues, $M(2; 120^\circ)$. Δ

Problema 2. Hállense las coordenadas rectangulares cartesianas del punto $M(4; 135^\circ)$.

Δ Según las fórmulas (1) tenemos

$$x = 4 \cdot \cos 135^\circ = 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2},$$

$$y = 4 \cdot \sin 135^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

De esta forma, $M(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$. Δ

§ 15. Longitud del vector

Del curso de geometría para la secundaria básica se sabe que la distancia entre los puntos A y B situados en una recta (eje) de coordenadas se calcula según la fórmula

$$|AB| = |x_B - x_A|,$$

donde x_A y x_B son las coordenadas de los puntos A y B .

Supongamos que dos puntos $A(x_1; y_1)$ y $B(x_2; y_2)$ (fig. 45) se dan en un plano, en el cual se elige un sistema

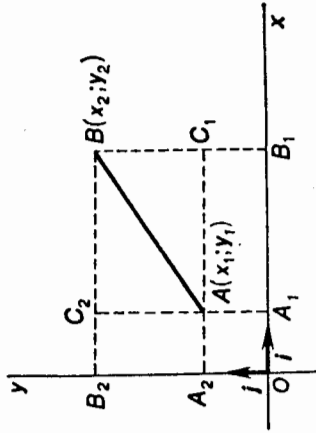


Fig. 45

rectangular de coordenadas O, i, j . Se requiere hallar la longitud del segmento $[AB]$.

Según el teorema de Pitágoras del triángulo ABC_1 hallamos $|AB|^2 = |AC_1|^2 + |C_1B|^2$, pero puesto que

$$|AC_1| = |A_1B_1| = |x_2 - x_1|$$

$$\text{y } |C_1B| = |A_2B_2| = |y_2 - y_1|,$$

$$\text{entonces } |AB|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2,$$

y, por consiguiente,

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1)$$

Si el segmento AB es paralelo al eje de las abscisas, entonces $y_1 = y_2$ (fig. 46) y la longitud del segmento AB

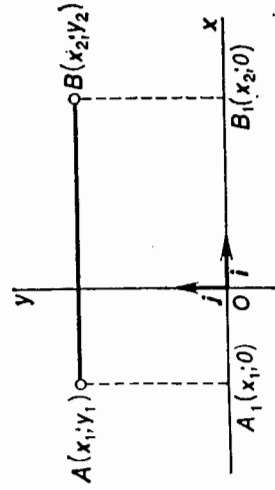


Fig. 46

es igual a la longitud del segmento A_1B_1 :

$$|AB| = |A_1B_1| = |x_2 - x_1|.$$

Si el segmento AB es paralelo al eje de ordenadas Oy (fig. 47), entonces

$$|AB| = |y_2 - y_1|.$$

Las últimas dos fórmulas son casos particulares de la fórmula (1).

Así pues, la longitud del segmento en el plano es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las diferencias de las coordenadas homónimas de sus extremos.

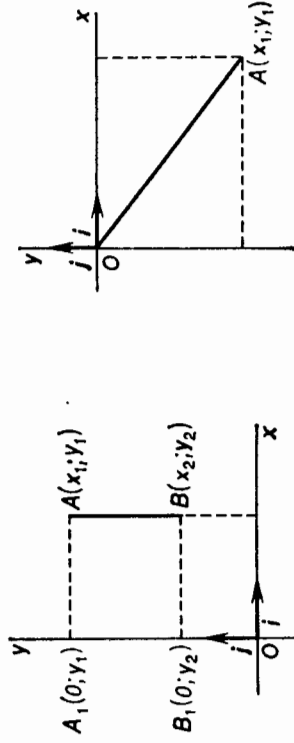


Fig. 47

Si uno de los puntos, por ejemplo B , coincide con el origen de coordenadas (fig. 48), la fórmula (1) se simplifica y toma la forma

$$|AO| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Sea que los puntos A y B se encuentran en el espacio:

$$A(x_1; y_1; z_1) \text{ y } B(x_2; y_2; z_2).$$

Construyamos un paralelepípedo rectangular $ACB_1DA_1C_1BD_1$, en el cual los puntos A y B servirán de extremos de su diagonal (fig. 49). Entonces, según el teorema de Pitágoras de $\triangle ADB_1$ y $\triangle AB_1B$ se desprende, que $|AB| = \sqrt{|AD|^2 + |DB_1|^2 + |B_1B|^2}$. Expresando $|AD|$, $|DB_1|$ y $|B_1B|$ en coordenadas, obtendremos

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (2)$$

Está claro, que si $z_1 = z_2 = 0$ la fórmula (2) se reduce a la fórmula (1); en este caso el segmento AB pertenece al plano xOy .

Recordemos que la longitud del vector $\vec{a} = \vec{AB}$ es igual a la longitud del segmento AB .

Fig. 48

Por lo tanto, utilizando las fórmulas (1) y (2), se puede expresar la longitud del vector $\vec{a} = \vec{AB}$ en el plano y en el espacio por medio de las coordenadas de los extremos de la manera siguiente:

$$|\vec{AB}| = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad (3)$$

$$|\vec{AB}| = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (4)$$

Sea que el vector $\vec{a} = (x; y; z)$ está definido en un sistema cartesiano rectangular de coordenadas. Entonces, las

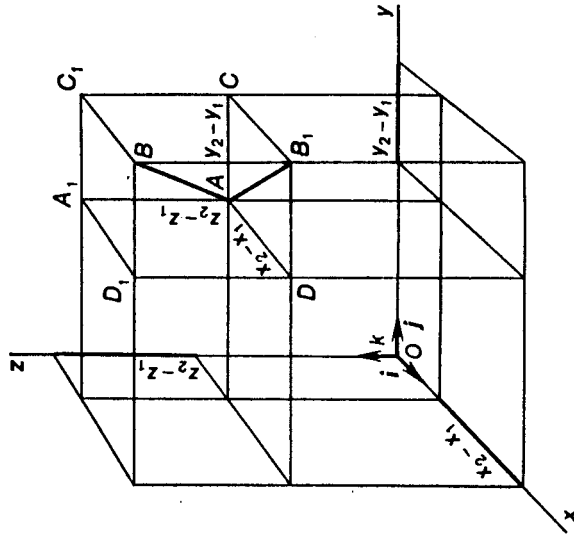


Fig. 49

coordenadas del vector $\vec{a} = \vec{AB}$ se expresan por medio de las coordenadas de los puntos $A(x_1; y_1; z_1)$ y $B(x_2; y_2; z_2)$ de la manera siguiente (§ 12):

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1.$$

De la fórmula (4) obtendremos la expresión de la longitud del vector $\vec{a} = (x; y; z)$ por medio de sus coordenadas:

$$|a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (5)$$

Es evidente, que para el plano la fórmula (5) tomará la forma

$$|a| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Problema 1. Hállese la longitud del vector \vec{AB} si $A(4; 1), B(7; 5)$.

△ Según la fórmula (3) hallamos

$$|\vec{AB}| = |AB| = \sqrt{(7-4)^2 + (5-1)^2} = 5. \quad \blacktriangle$$

Problema 2. Hállese la longitud del vector \vec{AB} si $A(3; 5; 1), B(5; 6; 3)$.

△ Utilizando la fórmula (4) hallamos

$$|\vec{AB}| = |AB| = \sqrt{(5-3)^2 + (6-5)^2 + (3-1)^2} = 3. \quad \blacktriangle$$

Problema 3. Hállese la longitud del vector $\vec{a} = (2; 3; -6)$.

△ Según la fórmula (5) obtenemos

$$|a| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2} = 7. \quad \blacktriangle$$

§ 16. Proyección del vector sobre el eje. Propiedades del vector

Sea que en el plano o en el espacio se dan el eje l con el vector unitario e y el vector arbitrario a .

Se denomina *proyección ortogonal* (o simplemente proyección) del vector a sobre el eje l , el número igual al producto de la longitud del vector a por el coseno del ángulo entre los vectores e y a .

La proyección del vector a sobre el eje l se designa con el símbolo $\text{pr}_l a$ o $\text{pr}_e a$.

Así pues, según la definición

$$\text{pr}_l a = |a| \cos(\widehat{e; a}).$$

Tracemos el vector a desde el punto O del eje l .

Si el ángulo entre los vectores e y a es agudo (fig. 50, a), la proyección del vector a sobre el eje l es igual a la longitud del segmento OA_1 , donde A_1 es la proyección del punto A sobre la recta l .

Efectivamente,

$$\text{pr}_l a = |a| \cos(\widehat{e; a}) = |OA| \cos \widehat{AOA_1} = |OA_1|.$$

Si el ángulo entre los vectores e y a es obtuso (fig. 50, b), la proyección del vector a sobre el eje l es igual a la longitud del segmento OA_1 tomada con signo menos.
En efecto,

$$\begin{aligned} \text{pr}_l a &= |a| \cos(\widehat{e; a}) = |OA| \cos \widehat{BOA} = \\ &= -|OA| \cos \widehat{A_1OA} = -|OA_1|. \end{aligned}$$

Si el vector a es perpendicular al eje l , $(\widehat{e; a}) = 90^\circ$ y $\text{pr}_l a = |a| \cos 90^\circ = 0$.

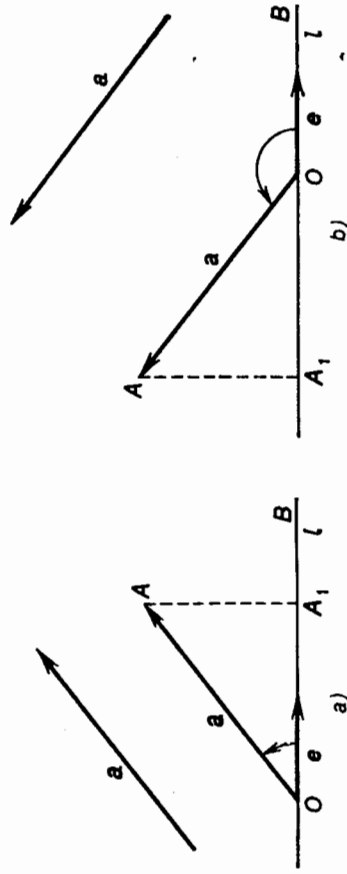


Fig. 50

Examinemos dos propiedades importantes de la proyección del vector sobre el eje.

Propiedad 1. Para cualesquiera vectores a y b es válida la igualdad

$$\text{pr}_l (a + b) = \text{pr}_l a + \text{pr}_l b,$$

donde l es un eje arbitrario.

Esta propiedad permite sustituir la proyección de la suma de los vectores por la suma de sus proyecciones y viceversa.

Propiedad 2. Para cualquier vector a y cualquier número k es válida la igualdad

$$\text{pr}_l ka = k \text{pr}_l a,$$

donde l es un eje arbitrario.

Esta propiedad permite sacar e introducir el factor numérico del signo de proyección.

Estas propiedades son válidas debido a las reglas de operaciones con los vectores expresados por sus coordenadas.

□ En efecto, sea que l es un eje arbitrario que tiene un punto de referencia O y un vector unitario e . Introduzcamos un sistema rectangular de coordenadas de la manera siguiente (fig. 51). Admitamos como origen de coordenadas el pun-

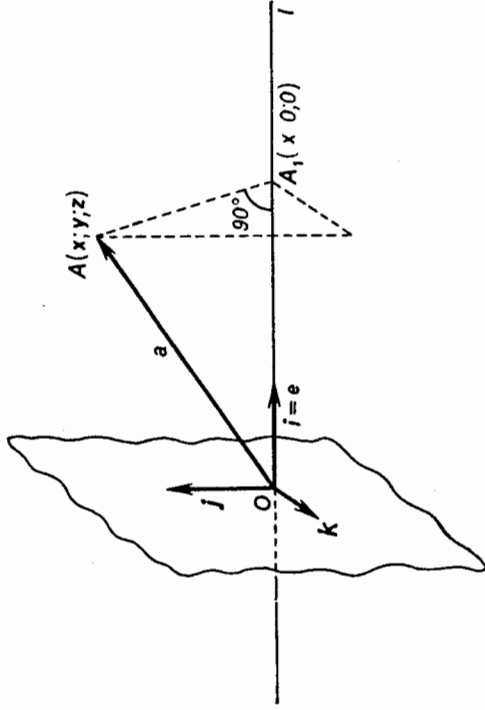


Fig. 51

to O , y el vector e , como el primer vector básico ($i = e$). En calidad de otros vectores básicos j y k , tomemos cualesquiera dos vectores unitarios perpendiculares entre sí, situados en un plano perpendicular al eje l .

Sea que el vector $a = \vec{OA}$ tiene las coordenadas x, y, z . Entonces, según la definición de proyección

$$\text{pr}_l a = |a| \cos(\widehat{i; a}).$$

Pero $|a| \cos(\widehat{i; a}) = x$, es decir, la proyección de cualquier vector sobre el eje l es igual a la abscisa de este vector en una base elegida por nosotros.

Puesto que la abscisa de la suma de vectores es igual a la suma de las abscisas de los vectores sumandos (§ 11), la proyección de la suma de los vectores sobre el eje l es igual a la suma de las proyecciones de estos vectores sobre el eje l .

Exactamente así, la proyección del producto del vector por un número es igual al producto de este número por la proyección del vector, ya que al multiplicar el vector por un número su abscisa se multiplica por este número. ■

§ 17. Producto escalar de dos vectores

En física, cuando hay un movimiento rectilíneo de un punto material de la posición B a la posición C (fig. 52), el trabajo A de la fuerza constante F se calcula según la fórmula

$$A = |F| \cdot |\vec{BC}| \cos(\widehat{F; \vec{BC}}).$$

Esta fórmula asigna al vector de fuerza F y al vector de desplazamiento \vec{BC} una variable escalar, el trabajo. La magnitud A se denomina producto escalar de los vectores F y \vec{BC} . El producto escalar puede ser definido para dos vectores cualesquiera. Se utiliza ampliamente en física y matemática.

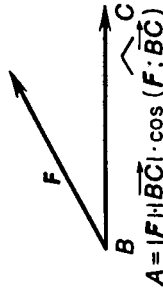


Fig. 52

Se denomina *producto escalar* de dos vectores no nulos un número igual al producto de las longitudes de estos vectores por el coseno del ángulo entre ellos. Si por lo menos de dos vectores uno es nulo, el producto escalar de estos vectores se toma igual a cero.

El producto escalar de los vectores a y b se designa $a \cdot b$. Así pues, según la definición

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos(\widehat{a; b}). \quad (1)$$

Si $a = b$, entonces el producto escalar toma la forma $a \cdot a$ y se denomina cuadrado escalar del vector a ; se designa con el símbolo a^2 . Es evidente que $a^2 = a \cdot a = |a|^2$.

Como se sabe (ver § 16), la proyección del vector b sobre un eje, cuya dirección coincide con la dirección del vector a se expresa por la fórmula

$$\text{pr}_a b = |b| \cos(\widehat{a; b}). \quad (2)$$

Utilizando las fórmulas (1) y (2) se puede escribir

$$a \cdot b = |a| \text{pr}_a b. \quad (2)$$

De este modo, el producto escalar de dos vectores es igual al producto de la longitud de uno de ellos y de la proyección del segundo por la dirección del primero.

Análogamente se obtiene la fórmula $a \cdot b = |b| \text{pr}_b a$.

Problema 1. Se sabe que $|a| = 2$, $|b| = \frac{1}{3}$, $(\widehat{a; b}) = 150^\circ$. Hallar $a \cdot b$.

Δ Según la fórmula (1) hallamos

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos(\widehat{a; b}) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \cos 150^\circ = -\frac{2\sqrt{3}}{9}. \blacktriangle$$

Problema 2. Hallar todos los productos escalares posibles de los vectores básicos i y j de un sistema cartesiano de coordenadas en el plano.

Δ Según la definición del producto escalar

$$i \cdot j = |i| \cdot |j| \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0,$$

$$j^2 = i \cdot i = |i| \cdot |i| \cos 0^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Análogamente $j \cdot i = 0$, $j^2 = 1$. ▲

Problema 3. ¿Qué signo tiene el producto escalar de los vectores a y b , si $90^\circ < (\widehat{a; b}) \leq 180^\circ$?

Δ Puesto que en la fórmula $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos(\widehat{a; b})$ los números $|a|$ y $|b|$ son no negativos, el signo de $a \cdot b$ depende del signo del coseno. En el intervalo $[90^\circ; 180^\circ] \times [90^\circ; 180^\circ]$ $\cos(\widehat{a; b}) < 0$, por lo tanto, $a \cdot b < 0$. ▲

Problema 4. ¿En qué intervalo se encuentra la magnitud del ángulo entre los vectores a y b , si $a \cdot b > 0$?

Δ Puesto que $a \cdot b > 0$, $|a| \neq 0$, $|b| \neq 0$ y $\cos(\widehat{a; b}) > 0$. De aquí que $(\widehat{a; b}) \in [0^\circ; 90^\circ[$. ▲

§ 18. Propiedades del producto escalar de los vectores

1. La multiplicación escalar de los vectores posee propiedad conmutativa:

$$a \cdot b = b \cdot a. \quad (1)$$

□ Puesto que $\widehat{(a; b)} = \widehat{(b; a)}$ y $|a| \cdot |b| = |b| \cdot |a|$, entonces $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos \widehat{(a; b)} = |b| \cdot |a| \cos \widehat{(b; a)} = b \cdot a$.

Si $a = 0$ o $b = 0$, entonces según la definición del producto escalar $a \cdot b = 0$ y $b \cdot a = 0$, es decir, $a \cdot b = b \cdot a$.
 2. La multiplicación escalar de los vectores posee propiedad asociativa respecto a la multiplicación del vector por un número:

$$(ka) \cdot b = k(a \cdot b). \quad (2)$$

□ Designemos $\widehat{(a; b)} = \varphi$ y $\widehat{(ka; b)} = \varphi_1$.

Si $k > 0$, $\widehat{(a; b)} = \widehat{(ka; b)}$, es decir, $\varphi = \varphi_1$, y entonces $(ka) \cdot b = |ka| \cdot |b| \cos \varphi_1 = k|a| \cdot |b| \cos \varphi = k(a \cdot b)$.

Si $k < 0$, $ka \uparrow a$ y $\varphi_1 = 180^\circ - \varphi$ y entonces, $(ka) \cdot b = |ka| \cdot |b| \cos \varphi_1 = |k| \cdot |a| \cdot |b| \cos (180^\circ - \varphi) = -k|a| \cdot |b| \cos \varphi = k|a| \cdot |b| \cos \varphi = k(a \cdot b)$.

Si $k = 0$ o $a = 0$ o $b = 0$, entonces $(ka) \cdot b = 0$ y $k(a \cdot b) = 0$, y por lo tanto, $(ka) \cdot b = k(a \cdot b)$.
 3. La multiplicación escalar de vectores posee propiedad distributiva respecto a la adición de vectores

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c. \quad (3)$$

□ Si $a = 0$, la propiedad (3) es evidente.

Sea que $a \neq 0$, entonces, $a \cdot (b + c) = |a| \cdot \text{pr}_a(b + c) = |a| \cdot (\text{pr}_a b + \text{pr}_a c) = |a| \cdot \text{pr}_a b + |a| \cdot \text{pr}_a c = a \cdot b + a \cdot c$.
 En el curso de la demostración fueron utilizadas las conocidas propiedades de la proyección del vector sobre el eje (§16). ■

Observemos que de (1) y (3) se deduce la fórmula

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c. \quad (4)$$

La semejanza de las propiedades del producto escalar de los vectores con las propiedades del producto de los números reales permite realizar fácilmente los cálculos y transformaciones con los productos escalares.

Problema. Demostrar la identidad

$$(a + b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2.$$

△ Utilizando las propiedades (1)—(4) del producto escalar obtenemos

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = (a + b) \cdot a + (a + b) \cdot b = a \cdot a + b \cdot a + a \cdot b + b \cdot b = a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2. \blacktriangle$$

Teorema. Para que dos vectores no nulos sean perpendiculares es necesario y suficiente que su producto escalar sea igual a cero:

$$(a \neq 0, b \neq 0, a \cdot b = 0) \Leftrightarrow a \perp b. \quad (5)$$

□ Necesidad. Sea que $a \perp b$. Entonces,

$$\varphi = \widehat{(a; b)} = 90^\circ \text{ y } a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

Suficiencia Sea que $a \cdot b = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Puesto que $a \neq 0$, $b \neq 0$, entonces $|a| \neq 0$, $|b| \neq 0$, y ya que $|a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi = 0$, $\cos \varphi = 0$ y, por consiguiente, $\varphi = 90^\circ$, es decir, $a \perp b$. ■

§ 19. Producto escalar de vectores dados por sus coordenadas

Sea que en el plano se tiene cierto sistema cartesiano rectangular de coordenadas y se dan los vectores $a = (x_1; y_1)$ y $b = (x_2; y_2)$. Puesto que

$$a = x_1 i + y_1 j, \quad b = x_2 i + y_2 j,$$

entonces, utilizando las respectivas propiedades de la multiplicación escalar de vectores obtenemos

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (x_1 i + y_1 j) \cdot (x_2 i + y_2 j) = \\ &= (x_1 x_2) i^2 + (x_1 y_2) i \cdot j + (y_1 x_2) j \cdot i + (y_1 y_2) j^2. \end{aligned}$$

Es evidente que $i^2 = j^2 = 1$ y $i \cdot j = j \cdot i = 0$, por lo tanto,

$$a \cdot b = x_1 x_2 + y_1 y_2. \quad (1)$$

Sea que ahora en el espacio se tiene cierto sistema cartesiano rectangular de coordenadas y se dan los vectores

$$a = (x_1; y_1; z_1), \quad b = (x_2; y_2; z_2).$$

Análogamente a lo expuesto obtenemos

$$a \cdot b = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (2)$$

Así pues, el producto escalar de dos vectores es igual a la suma de los productos de las coordenadas homónimas de estos vectores.

Problema 1. Calcúlese $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, si $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -5\mathbf{i} + \mathbf{j}$.
 $\Delta \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \cdot (-5\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 1 = -7$. \blacktriangle

Problema 2. Calcúlese $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, si $\mathbf{a} = (2; -3; 4)$, $\mathbf{b} = (5; 7; -4)$.

$\Delta \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 7 + 4 \cdot (-4) = -15$. \blacktriangle

Problema 3. Hállase la longitud del vector $\mathbf{a} = (x; y; z)$.
 Δ Utilizando la fórmula (2) obtendremos

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = xx + yy + zz = x^2 + y^2 + z^2.$$

Por consiguiente,

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad \blacktriangle$$

§ 20. Cálculo del ángulo entre dos vectores

Según la definición del producto escalar tenemos que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}; \mathbf{b}}).$$

Por lo tanto, si $\mathbf{a} \neq 0$ y $\mathbf{b} \neq 0$

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}; \mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}, \quad (1)$$

es decir, el coseno del ángulo entre los vectores no nulos \mathbf{a} y \mathbf{b} es igual al producto escalar de estos vectores, dividido por el producto de sus longitudes.

Supongamos que en el espacio hay un sistema cartesiano rectangular de coordenadas y se dan los vectores $\mathbf{a} = (x_1; y_1; z_1)$ y $\mathbf{b} = (x_2; y_2; z_2)$. Entonces, como es sabido (ver § 19)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2},$$

y, por lo tanto, utilizando la igualdad (1) obtendremos la fórmula

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}; \mathbf{b}}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (2)$$

Esta fórmula permite calcular el coseno del ángulo entre los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} , según las coordenadas de estos vectores.

Si los vectores $\mathbf{a} = (x_1; y_1)$ y $\mathbf{b} = (x_2; y_2)$ se dan en un sistema cartesiano rectangular de coordenadas en el plano, entonces el coseno del ángulo entre ellos se calcula según la fórmula

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}; \mathbf{b}}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}. \quad (3)$$

Problema 1. Se dan dos vectores: $\mathbf{a} = (3; 4)$ y $\mathbf{b} = (4; 3)$. Hallar el ángulo entre ellos.

Δ Sustituyendo las coordenadas de los vectores en la fórmula (3), obtenemos

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}; \mathbf{b}}) = \frac{3 \cdot 4 + 4 \cdot 3}{\sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{24}{25},$$

de donde (según la tabla) $(\widehat{\mathbf{a}; \mathbf{b}}) \approx 16^\circ$. \blacktriangle

Problema 2. Hállase el coseno del ángulo entre los vectores

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Δ Utilizando la fórmula (2) obtendremos

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}; \mathbf{b}}) = \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = -\frac{4}{9}. \quad \blacktriangle$$

§ 21. Producto vectorial de dos vectores y sus propiedades

En física el momento de fuerza \mathbf{F} respecto al punto O se representa por el vector \vec{OM} , perpendicular al plano en

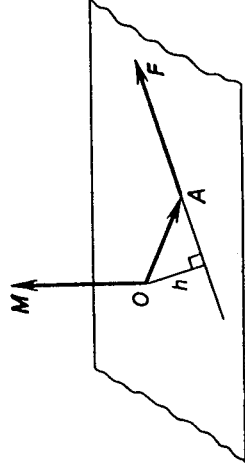


Fig. 53

el cual está situado el punto O y el vector \mathbf{F} (fig. 53). La longitud del vector \vec{OM} se define como el producto de la

longitud del vector F por el brazo h (h es la distancia del punto O a la recta en la cual está representado el vector de fuerza F), es decir, $|\vec{OM}| = |F| \cdot h$ o

$$|\vec{OM}| = |F| \cdot |r| \cdot \widehat{\text{sen}}(F; r),$$

donde $r = \vec{OA}$ es el radio vector del punto de aplicación de la fuerza F .

El vector \vec{OM} se denomina producto vectorial del vector r por el vector F . Antes de dar la definición del producto

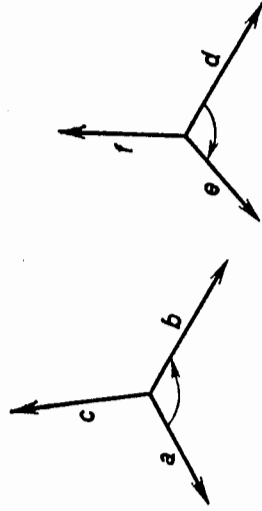


Fig. 54

vectorial de dos vectores arbitrarios a y b , introducamos el concepto de ternas de vectores derecha e izquierda.

Tres vectores no coplanares a, b y c tomados en el orden indicado, forman la terna *derecha*, si después de ser reducidos al origen común el vector c está situado por el otro lado del plano, que contiene los vectores a y b , de donde el giro más breve de a a b parece ser realizado en sentido antihorario. En caso contrario, la terna de vectores se denomina *izquierda*. Los vectores a, b, c , representados en la figura 54, forman la terna derecha, mientras que los vectores d, e, f , la izquierda.

Los vectores r, F, \vec{OM} en la figura 53 forman la terna derecha.

Producto vectorial del vector a por el vector b no colineal a él se denomina tal tercero vector c que satisface las tres condiciones siguientes:

- 1) la longitud del vector $|c| = |a| \cdot |b| \cdot \widehat{\text{sen}}(a; b)$;

2) el vector c es perpendicular a los vectores factores a y b ; $c \perp a$ y $c \perp b$;

3) los tres vectores a, b, c forman en el orden indicado una terna derecha.

El producto vectorial de los vectores colineales se considera igual al vector nulo.

El producto vectorial del vector a por el vector b se designa con el símbolo $[a; b]$. Las condiciones 1) y 2) definen el vector $c = [a; b]$ con precisión de hasta dos direcciones recíprocamente opuestas. La condición 3) determina una de estas dos direcciones. La condición 1) puede ser enunciada puramente en forma geométrica: la longitud del vector c contiene tantas unidades de longitud, cuantas unidades cuadradas homónimas comprende el área de un paralelogramo construido sobre los vectores factores (fig. 55).

De la condición 1) se desprende que $[a; b] \neq 0$, si a y b son no colineales. Por otro lado, el producto vectorial de los vectores colineales según la definición es igual al vector nulo. Así pues, la igualdad

$$[a; b] = 0$$

es la condición necesaria y suficiente de colinealidad de los vectores a y b . Examinemos algunas propiedades del producto vectorial.

1. Al cambiar el orden de los factores el producto vectorial conserva su longitud, pero cambia su dirección por la opuesta:

$$[a; b] = -[b; a].$$

□ En efecto, de acuerdo con la definición del producto vectorial se tiene

$$|[a; b]| = |a| \cdot |b| \cdot \widehat{\text{sen}}(a; b),$$

$$|[b; a]| = |b| \cdot |a| \cdot \widehat{\text{sen}}(b; a),$$

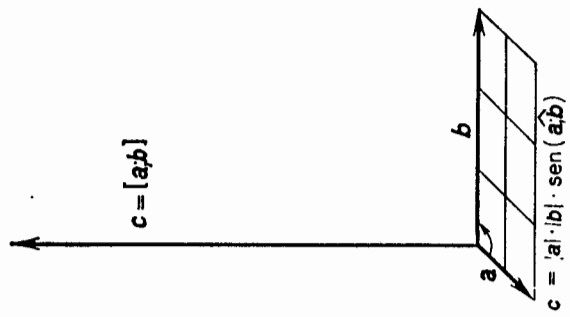


Fig. 55

puesto que $(\widehat{a; b}) = (\widehat{b; a})$, entonces $|[a; b]| = |[b; a]|$. Los vectores $[a; b]$ y $[b; a]$ son perpendiculares al plano definido por los vectores a y b . Pero, como los vectores a, b y $[a; b]$ (lo mismo que los vectores b, a y $[b; a]$) forman ternas derechas, los vectores $[a; b]$ y $[b; a]$ deberán ser contrariamente dirigidos (fig. 56). ■

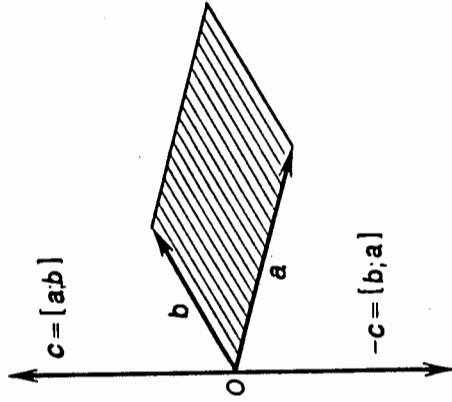


Fig. 56

Aceptemos las propiedades 2 y 3 del producto vectorial sin recurrir a la demostración.

Problema 1. Hállese la longitud del vector $[3a - b; a - 2b]$, si $a \perp b$, $|a| = 3$, $|b| = 2$.

△ Debido a las propiedades 2 y 3 del producto vectorial tenemos

$$[3a - b; a - 2b] = 3[a; a] - [b; a] - 6[a; b] + 2[b; b].$$

Pero $[a; a] = 0$ y $[b; b] = 0$, ya que cualquier vector es colineal a sí mismo, y el producto vectorial de los vectores colineales es igual al vector nulo. En adelante, de acuerdo con la propiedad 1 tenemos

$$[b; a] = -[a; b],$$

y, por lo tanto,

$$[3a - b; a - 2b] = -5[a; b].$$

Por consiguiente,

$$|[3a - b; a - 2b]| = |-5[a; b]| = 5|a| \cdot |b| \cdot \text{sen } 90^\circ = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30. \blacktriangle$$

Problema 2. Hállese y representense los vectores $[a; b]$ y $[b; a]$, si $a = 3i$, $b = 2i + 2k$ (i, j, k son vectores unitarios perpendiculares entre sí que forman la terna derecha).

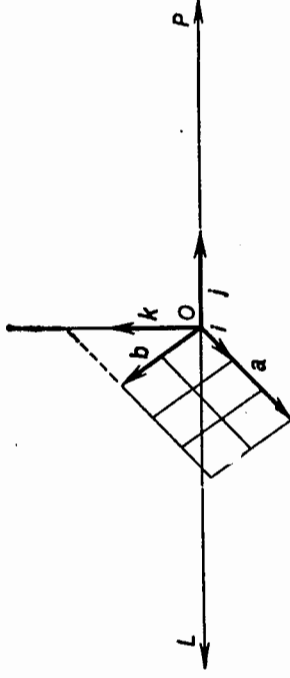


Fig. 57

△ Puesto que $[i; i] = 0$ e $[i; k] = -j$, entonces $[a; b] = [3i; 2i + 2k] = 6[i; i] + 6[i; k] = -6j$.

El vector $[a; b] = -6j$ se representa en la figura 57 por el segmento dirigido \vec{OL} , el vector $[b; a] = -6j$, por el segmento dirigido \vec{OP} . ▲

§ 22. Producto vectorial de dos vectores definidos por sus coordenadas

Hallemos la expresión para el producto vectorial de dos vectores por medio de las coordenadas cartesianas rectangulares de estos vectores.

Sea que los vectores $a = (x_1; y_1; z_1)$ y $b = (x_2; y_2; z_2)$ están dados por sus coordenadas en un sistema cartesiano rectangular de coordenadas O, i, j, k y la terna de los vectores i, j, k es derecha (esto se supondrá siempre en adelante para mayor precisión).

Desarrollemos a y b según los vectores básicos:

$$a = x_1i + y_1j + z_1k, \quad b = x_2i + y_2j + z_2k.$$

Utilizando las propiedades del producto vectorial, obtenemos

$$\begin{aligned} [a; b] &= [x_1i + y_1j + z_1k; x_2i + y_2j + z_2k] = \\ &= x_1x_2[i; i] + x_1y_2[i; j] + x_1z_2[i; k] + y_1x_2[j; i] + \\ &+ y_1y_2[j; j] + y_1z_2[j; k] + z_1x_2[k; i] + z_1y_2[k; j] + \\ &+ z_1z_2[k; k]. \end{aligned} \quad (1)$$

Según la definición del producto vectorial hallamos

$$\begin{aligned} [i; i] &= 0, & [i; j] &= k, & [i; k] &= -j, \\ [j; i] &= -k, & [j; j] &= 0, & [j; k] &= i, \\ [k; i] &= j, & [k; j] &= -i, & [k; k] &= 0. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta estas igualdades se puede escribir la fórmula (1) así:

$$\begin{aligned} [a; b] &= x_1 y_2 k - x_1 z_2 j - y_1 x_2 k + y_1 z_2 i + \\ &+ z_1 x_2 j - z_1 y_2 i \\ [a; b] &= (y_1 z_2 - z_1 y_2) i + (z_1 x_2 - z_2 x_1) j + \\ &+ (x_1 y_2 - y_1 x_2) k. \end{aligned} \quad (2)$$

La fórmula (2) da la expresión para el producto vectorial de dos vectores representados por sus coordenadas.

La fórmula obtenida es voluminosa y se recuerda con dificultad. Utilizando las designaciones de los determinantes (*Álgebra y principios de análisis*, parte I, § 10), puede ser escrita en otra forma más cómoda para retenerla:

$$[a; b] = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} k. \quad (3)$$

Habitualmente la fórmula (3) se escribe aún más brevemente:

$$[a; b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \quad (4)$$

considerando que el segundo miembro de la fórmula (3) está obtenido formalmente del segundo miembro de la fórmula (4), según la regla de desarrollo del determinante por la primera fila.

Señalemos también, que en el caso particular, cuando los vectores a y b están situados en el plano de los vectores i y j la fórmula (4) se simplifica:

$$[a; b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} k. \quad (5)$$

Problema 1. Hállese el producto vectorial $[a; b]$ de los vectores $a = (2; 3; -4)$ y $b = (5; 1; 2)$.

△ Sustituyendo directamente las coordenadas de los vectores a y b en la fórmula (4) obtenemos

$$[a; b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Por consiguiente, $[a; b] = 10i - 24j - 13k$. ▲

Problema 2. Hállese la longitud del vector $[a; b]$, si $a = (2, 3)$ y $b = (-4; 7)$.

△ Utilicemos la fórmula (5):

$$[a; b] = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} k = 17k.$$

Por consiguiente, $|[a; b]| = |17k| = 17$. ▲

§ 23*. Producto mixto de tres vectores y sus propiedades

Se denomina *producto mixto de tres vectores* a, b, c el número igual al producto escalar del vector $[a; b]$ por el vector c .

El producto mixto de los vectores a, b y c se designa $(a; b; c)$. Por consiguiente,

$$(a; b; c) = |[a; b] \cdot c| = |c| \cdot \cos \psi, \quad (1)$$

donde ψ es el ángulo entre los vectores $[a; b]$ y c .

Teorema 1. *El módulo del producto mixto de tres vectores no coplanares a, b y c es igual al volumen del paralelepípedo construido sobre los vectores a, b, c .*

□ Como es sabido (21), el área S del paralelogramo construido sobre los vectores a y b es igual a $|[a; b]|$. Por lo tanto de la fórmula (1) se deduce que

$$(a; b; c) = S \cdot |c| \cdot \cos \psi.$$

Por otro lado, el volumen V del paralelepípedo construido sobre los vectores a, b, c (fig. 58), es igual al producto del área de su base S por la altura h , además, $h = |AA_2|$, donde A_2 es la proyección del vértice A_1 sobre el eje defi-

nido por el vector $[a; b]$. Puesto que $|AA_2| = |c| \times |\cos \psi|$,

$$V = S \cdot h = S \cdot |c| \cdot |\cos \psi| = |(a; b; c)| \cdot \blacksquare$$

De la fórmula (1) se desprende que si el producto mixto de tres vectores no es igual a cero, su signo coincide con el signo $\cos \psi$. Por lo tanto,

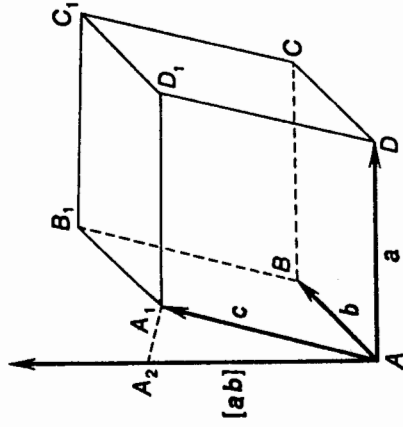


Fig. 58

Así pues, si los vectores a, b, c forman una terna derecha, entonces $(a; b; c) > 0$, si forman una terna izquierda, $(a; b; c) < 0$.

Teorema 2. El producto mixto de tres vectores es igual a cero, cuando y sólo cuando los vectores son coplanares.

□ Necesidad. Sea que $(a; b; c) = 0$. Supongamos que los vectores a, b y c son no coplanares. Construyamos sobre estos vectores un paralelepípedo. Su volumen $V > 0$, pero según el teorema 1 $|(a; b; c)| = V$, lo que contradice a la suposición.

Suficiencia. Sea que los vectores a, b y c son coplanares. Entonces, el vector $[a; b]$ es perpendicular al vector c , pero el producto escalar de los vectores perpendiculares es igual a cero, es decir, $[a; b] \cdot c = (a; b; c) = 0$. ■

Examinemos algunas propiedades del producto mixto.

1. Cualesquiera que sean los vectores a, b y c son válidas las igualdades

$$(a; b; c) = (b; c; a) = (c; a; b),$$

es decir, en caso de la permutación cíclica de los factores el producto mixto no varía.

□ Es suficiente demostrar la primera igualdad, ya que la segunda se deduce de la primera.

Si los vectores a, b y c son coplanares, la igualdad $(a; b; c) = (b; c; a)$ es evidente; ambos miembros de la igualdad son iguales a cero.

Sea que los vectores a, b y c son no coplanares. Entonces, debido al teorema 1

$$|(a; b; c)| = V \quad \text{y} \quad |(b; c; a)| = V,$$

donde V es el volumen del paralelepípedo construido sobre los tres vectores dados. Pero las ternas de los vectores a, b, c y b, c, a son al mismo tiempo, bien derechas o bien izquierdas, por lo tanto los signos de los números $(a; b; c)$ y $(b; c; a)$ coinciden.

2. Cualesquiera que sean los vectores a, b y c son válidas las igualdades

$$(a; b; c) = -(b; a; c) = -(a; c; b),$$

es decir, en caso de permutación de dos factores adyacentes el signo del producto mixto se cambia por el contrario.

□ La primera de las igualdades se deduce de las propiedades del producto vectorial (21):

$$(a; b; c) = [a; b] \cdot c = -[b; a] \cdot c = -(b; a; c).$$

La segunda igualdad es evidente debido a la propiedad 1 del producto mixto. ■

Problema 1. Calcúlese $(a; b; c)$, si los vectores a, b, c

forman una terna derecha, $a \perp c, b \perp c, (a; b) = 150^\circ$, $|a| = |b| = 4, c = 3$.

△ Según la definición

$$\begin{aligned} (a; b; c) &= [a; b] \cdot c = |a| \cdot |b| \cdot \text{sen } 150^\circ \cdot |c| \cdot \cos 0^\circ = \\ &= 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 24. \blacktriangle \end{aligned}$$

Problema 2. Calcúlese $(i + j; j - 2i; k)$, donde i, j, k son vectores unitarios perpendiculares entre sí que forman la terna derecha.

$$\begin{aligned} \Delta (i + j; j - 2i; k) &= [i + j; j - 2i] \cdot k = \\ &= ([i; j] - 2[i; i] + [j; j] - 2[j; i]) \cdot k = 3[i; j] \cdot k = \\ &= 3(i; j; k) = 3. \blacktriangle \end{aligned}$$

§ 24 *. Producto mixto de tres vectores definidos por sus coordenadas

Sea que los vectores a , b y c están dados por sus coordenadas rectangulares cartesianas

$$a = (x_1; y_1; z_1), \quad b = (x_2; y_2; z_2), \quad c = (x_3; y_3; z_3).$$

Para calcular el producto mixto $(a; b; c)$ hallamos en primer lugar el producto vectorial de los vectores a y b (22, fórmula (4)):

$$[a; b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} k.$$

Multipliquemos ahora escalarmente el vector $[a; b]$ por el vector $c = x_3i + y_3j + z_3k$. Según la fórmula (2) del 19 obtendremos

$$[a; b] \cdot c = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Por consiguiente,

$$(a; b; c) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad (1)$$

es decir, el producto mixto de tres vectores es igual al determinante de tercer grado que contiene en la primera fila las coordenadas del primer vector, en la segunda, del segundo y en la tercera, las coordenadas del tercer vector.

Ahora se puede enunciar el teorema 2 del párrafo anterior de la manera siguiente.

Para que los vectores $a = (x_1; y_1; z_1)$, $b = (x_2; y_2; z_2)$ y $c = (x_3; y_3; z_3)$ sean coplanares, es necesario y suficiente que

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Problema 1. Determinar si son coplanares los vectores $a = (4; 2; 1)$, $b = (8; 6; 8)$ y $c = (5; 2; 1)$.

△ Hagamos uso de la condición (2):

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - 2 \cdot 4 + 8 = 0.$$

Por consiguiente, los vectores son coplanares.

Problema 2. Hállese el volumen del paralelepípedo construido sobre los vectores $a = (4; -1; 1)$, $b = (8; 3; 3)$ y $c = (5; 1; 1)$.

△ Hallemos el producto mixto de los vectores dados:

$$(a; b; c) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 8 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 8 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -14.$$

Ahora según el teorema 1 del § 23 obtenemos

$$V = |(a; b; c)| = |-14| = 14 \text{ (unidades cúbicas)}. \quad \blacktriangle$$

§ 25. Solución de problemas por el método vectorial

Cuando se resuelven los problemas geométricos por el método vectorial es preciso pasar de la formulación geométrica del problema a su descripción por vectores. Luego, utilizando las respectivas propiedades de los vectores, hallar ciertas relaciones vectoriales, de las cuales se puede obtener la solución del problema. Ilustremos con ejemplos, cómo se hace esto en la práctica.

Problema 1. Demuéstrese que un segmento que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio es paralelo a las bases.

△ Sea que los puntos M y N son los puntos medios de las diagonales del trapecio $ABCD$ (fig. 59). Demostremos que $[MN] \parallel [AD]$. Para esto es suficiente cerciorarse de que el vector \vec{MN} es colineal al vector \vec{AD} .

Puesto que M y N son los puntos medios de los segmentos AC y BD , entonces

$$\vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{AC} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{BC}),$$

$$\vec{AN} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AD}).$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\vec{MN} &= \vec{AN} - \vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD}) - \\ & - \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BC}) = \frac{1}{2}(\vec{AD} - \vec{BC}).\end{aligned}$$

El vector \vec{BC} es colineal al vector \vec{AD} , es decir, $\vec{BC} = k_1 \vec{AD}$. Por lo tanto

$$\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AD} - k_1 \vec{AD}) = \frac{1}{2}(1 - k_1) \vec{AD} = k \vec{AD},$$

es decir, el vector \vec{MN} es colineal al vector \vec{AD} . Como \vec{AD} es colineal a \vec{BC} , el segmento MN es paralelo a las bases del trapecio. ▲

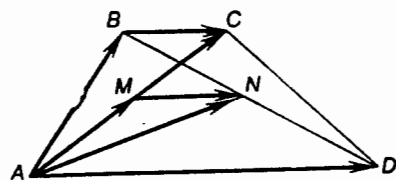


Fig. 59

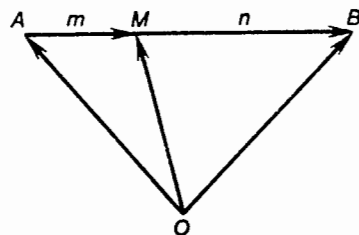


Fig. 60

Así pues, para convencerse de que ciertos segmentos AB y CD son paralelos, es suficiente mostrar que $\vec{AB} = k \vec{CD}$, donde k es cierto número.

Problema 2. Dividir el segmento dado AB en la relación dada $m : n$, es decir, hallar tal punto $M \in [AB]$ que $\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{m}{n}$. Examinar también un caso particular: $m = n$.

▲ Es evidente que el punto $M \in [AB]$ divide el segmento AB (fig. 60) en la relación dada $m : n$ cuando y sólo cuando

$$\vec{AM} = \frac{m}{n} \vec{MB}. \quad (1)$$

a) Si los puntos A y B están expresados por sus radios vectores \vec{OA} y \vec{OB} respecto a cierto punto O , entonces de (1)

se deduce la igualdad $\vec{OM} - \vec{OA} = \frac{m}{n}(\vec{OB} - \vec{OM})$, de la cual resulta que

$$\vec{OM} = \frac{n}{m+n} \vec{OA} + \frac{m}{m+n} \vec{OB}. \quad (2)$$

La fórmula (2) da la solución del problema, ya que expresa el radio vector del punto buscado M , que divide el segmento AB en la relación $m : n$ por medio de los radios vectores de los puntos dados A y B .

En particular, si el punto M es el punto medio del segmento AB , entonces poniendo en la fórmula (2) $m = n$, obtendremos

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}). \quad (3)$$

b) Si los puntos A y B están expresados por sus coordenadas en un cierto sistema cartesiano de coordenadas O, e_1, e_2, e_3 , utilizando la fórmula (2), se puede hallar fácilmente las coordenadas del punto M en el mismo sistema. La igualdad vectorial (2) es equivalente a las tres igualdades numéricas

$$\begin{aligned}x &= \frac{n}{m+n} x_1 + \frac{m}{m+n} x_2, \\ y &= \frac{n}{m+n} y_1 + \frac{m}{m+n} y_2, \\ z &= \frac{n}{m+n} z_1 + \frac{m}{m+n} z_2,\end{aligned} \quad (4)$$

donde x_1, y_1, z_1 y x_2, y_2, z_2 son las coordenadas de los extremos del segmento dado AB , y x, y, z son las coordenadas del punto buscado M .

En el caso particular, cuando el punto M es el punto medio del segmento AB , las fórmulas (4) se simplifican:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad \blacktriangle \quad (5)$$

De este modo, para hallar el punto M que divide el segmento AB en la relación de $m : n$, contando del punto A , se debe emplear la fórmula (2), si los extremos del segmento están dados por sus radios vectores, o por las fórmulas (4), si los extremos del segmento están dados por sus coorde-

nadas. Para hallar el punto medio del segmento se utilizan la fórmula (3) o las fórmulas (5) respectivamente.

Problema 3. Demostrar que las medianas de un triángulo arbitrario ABC se intersecan en tal punto M que:

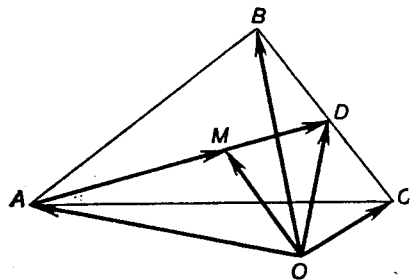


Fig. 61

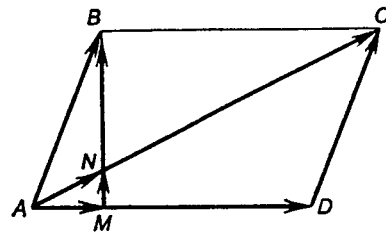


Fig. 62

- 1) el punto M divide cada mediana en la relación de 2 : 1, contando desde el vértice del triángulo;
- 2) para cualquier punto O es válida la relación

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}).$$

△ Sea que el punto M divide la mediana AD del triángulo ABC en la relación 2 : 1 (fig. 61). Entonces, según la fórmula (2) obtenemos ($m = 2$, $n = 1$)

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OD},$$

donde O es un punto arbitrario del espacio. El punto D es el punto medio del lado BC , por lo tanto, según la fórmula (3),

$$\vec{OD} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC}).$$

Por consiguiente,

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC}) = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}).$$

El mismo resultado se obtendrá para cualquier otra mediana del triángulo ABC . Esto quiere decir que M es el punto común de todas las tres medianas. De esta forma, ambas afirmaciones del problema están demostradas. ▲

De la solución de este problema se deduce que si M es el punto de intersección de las medianas del triángulo ABC , y O es un punto arbitrario del espacio, tiene lugar la fórmula

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}). \quad (6)$$

Problema 4. En el lado AD y en la diagonal AC del paralelogramo $ABCD$ (fig. 62) se toman dos puntos tales que $|AM| = \frac{1}{5}|AD|$ y $|AN| = \frac{1}{6}|AC|$. Demuéstrese que los puntos M , N y B se sitúan en una misma recta.

△ Para cerciorarse de que los puntos M , N y B están situados en una misma recta, es suficiente demostrar que los vectores \vec{MN} y \vec{MB} son colineales. Introduzcamos el sistema cartesiano de coordenadas: tomemos como origen de coordenadas el punto A y como vectores básicos los vectores \vec{AD} y \vec{AB} . En este sistema de coordenadas los puntos M , N y B tienen las coordenadas $(\frac{1}{5}; 0)$, $(\frac{1}{6}; \frac{1}{6})$, $(0; 1)$. Por consiguiente,

$$\vec{MN} = \left(-\frac{1}{30}; \frac{1}{6}\right), \quad \vec{MB} = \left(-\frac{1}{5}; 1\right).$$

Los vectores \vec{MN} y \vec{MB} son colineales, ya que

$$\vec{MN} = \frac{1}{6}\vec{MB}. \quad \blacktriangle$$

Así pues, para determinar si los tres puntos dados $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M_3(x_3; y_3)$ están situados en una misma recta es suficiente demostrar que los vectores $\vec{M_1M_2}$ y $\vec{M_1M_3}$ son colineales. Escribamos la condición de colinealidad $\vec{M_1M_3} = k\vec{M_1M_2}$ en coordenadas

$$x_3 - x_1 = k(x_2 - x_1),$$

$$y_3 - y_1 = k(y_2 - y_1).$$

Al eliminar k de estas dos ecuaciones obtendremos

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 0.$$

Esta igualdad puede ser escrita en una forma más cómoda:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

La igualdad (7) da la condición necesaria y suficiente de pertenencia de los tres puntos del plano $M_1(x_1; y_1)$; $M_2(x_2; y_2)$, $M_3(x_3; y_3)$ a una recta.

Por ejemplo, en el problema 4 se trataba de los puntos $M\left(\frac{1}{5}; 0\right)$, $N\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right)$, $B(0; 1)$. Ellos pertenecen a una recta, ya que

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{6} - \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{30} - \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Problema 5. En el sistema cartesiano rectangular de coordenadas se dan los puntos $M_1(5; 0; 1)$ y $M_2(4; 1; -2)$. ¿Para qué valores de x y y el punto $M_3(x; y; 4)$ pertenece a la recta M_1M_2 ?

△ Los puntos M_1, M_2, M_3 pertenecen a una recta cuando y sólo cuando los vectores $\overrightarrow{M_1M_2}$ y $\overrightarrow{M_1M_3}$ son colineales.

En el párrafo 21 fue demostrado que la condición $[\overrightarrow{M_1M_2}; \overrightarrow{M_1M_3}] = 0$ es la condición necesaria y suficiente de colinealidad de dos vectores. Hallemos las coordenadas de los vectores

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (-1; 1; -3), \quad \overrightarrow{M_1M_3} = (x - 5; y; 3)$$

y su producto vectorial

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{M_1M_2}; \overrightarrow{M_1M_3}] &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -3 \\ x-5 & y & 3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ y & 3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ x-5 & 3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ x-5 & y \end{vmatrix} k = \\ &= (3 + 3y) i + (18 - 3x) j + (5 - x - y) k. \end{aligned}$$

El vector obtenido es igual al vector nulo si

$$\begin{cases} 3 + 3y = 0, \\ 18 - 3x = 0, \\ 5 - x - y = 0. \end{cases}$$

De aquí se deduce que $x = 6, y = -1$. ▲

Así pues, para cerciorarse que los puntos M_1, M_2, M_3 pertenecen a una misma recta es suficiente demostrar que $[\overrightarrow{M_1M_2}; \overrightarrow{M_1M_3}] = 0$.

Señalemos que si los puntos M_1, M_2, M_3 están situados en el mismo plano xOy , esta condición es equivalente a la condición (7).

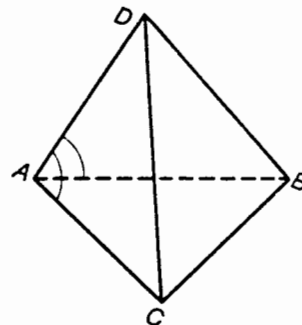


Fig. 63

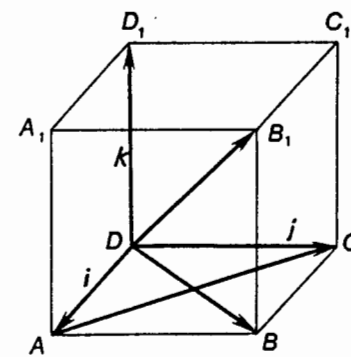


Fig. 64

Problema 6. Se da la pirámide triangular $ABCD$ (fig. 63):

$|AB| = |AC|$, $\widehat{DAB} = \widehat{DAC}$. Demuéstrese que $[AD] \perp [BC]$.

△ Las aristas AD y BC son perpendiculares, si $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Hallemos el producto escalar de los vectores \overrightarrow{AD} y \overrightarrow{BC} :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \\ &= |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos(\widehat{DAC}) - |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \widehat{DAB} = 0, \end{aligned}$$

ya que según la condición $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}|$ y $\widehat{DAC} = \widehat{DAB}$. ▲

Así pues, para cerciorarse de que ciertos segmentos AB y CD son perpendiculares es suficiente mostrar que $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$.

Problema 7. Hállense las magnitudes de los ángulos entre las diagonales del cubo y las diagonales de sus caras.

△ Es evidente, que es suficiente hallar las magnitudes de los ángulos entre la diagonal del cubo DB_1 y las diagonales de la base inferior DB y AC (fig. 64).

Introduzcamos un sistema de coordenadas D, i, j, k de manera que

$$i = \vec{DA}, \quad j = \vec{DC}, \quad k = \vec{DD}_1.$$

En el sistema de coordenadas elegido

$$\vec{DB}_1 = (1; 1; 1), \quad \vec{DB} = (1; 1; 0), \quad \vec{AC} = (-1; 1; 0).$$

Hagamos uso de la fórmula (1) del § 20:

$$\cos(\widehat{DB_1; DB}) = \frac{\vec{DB}_1 \cdot \vec{DB}}{|\vec{DB}_1| \cdot |\vec{DB}|} = \frac{2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\cos(\widehat{DB_1; AC}) = \frac{\vec{DB}_1 \cdot \vec{AC}}{|\vec{DB}_1| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{0}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = 0,$$

de donde $(\widehat{DB_1; DB}) \approx 35^\circ$, $(\widehat{DB_1; AC}) = 90^\circ$. ▲

Así pues, la magnitud del ángulo entre los segmentos se puede hallar de la manera siguiente: escójase un sistema rectangular de coordenadas, hállense las coordenadas de los vectores respectivos y, luego, utilícense las fórmulas (2) o (3) del § 19.

Problema 8. En la pirámide $ABCD$ (fig. 65) $\widehat{ADB} + \widehat{ADC} = 180^\circ$. Hállese \widehat{ADF} , si $[DF]$ es la bisectriz del ángulo BDC .

△ Examinemos la base e_1, e_2, e_3 , donde e_1, e_2, e_3 son vectores unitarios, cuyas direcciones coinciden con las direcciones de los vectores $\vec{DA}, \vec{DB}, \vec{DC}$. Es fácil ver que el vector $e_2 + e_3$ tiene la misma dirección que el vector \vec{DF} .

De acuerdo con la fórmula (1) del § 20

$$\cos(\widehat{ADF}) = \cos(e_1; e_2 + e_3) = \frac{e_1 \cdot (e_2 + e_3)}{|e_1| \cdot |e_2 + e_3|} = 0,$$

puesto que

$$e_1 \cdot (e_2 + e_3) = e_1 \cdot e_2 + e_1 \cdot e_3 = |e_1| \cdot |e_2| \times$$

$$\times \cos(\widehat{ADB}) + |e_1| \cdot |e_3| \cdot \cos(\widehat{ADC}) =$$

$$= \cos(\widehat{ADB}) + \cos(180^\circ - \widehat{ADB}) = \cos(\widehat{ADB}) - \cos(\widehat{ADB}) = 0,$$

por consiguiente, $\widehat{ADF} = 90^\circ$. ▲

De este modo, para calcular la magnitud del ángulo es suficiente elegir tres vectores no coplanares (dos no colineales en el caso del plano), cuyas longitudes y magnitudes de los ángulos entre ellos son conocidas. Luego, se hallan los vectores que dan el ángulo buscado y se calcula el coseno del ángulo buscado, según la fórmula

$$\cos(\widehat{a; b}) = \frac{a \cdot b}{|a \cdot b|}.$$

Problema 9. Calcúlese el área del triángulo, cuyos vértices están dados por sus coordenadas en el sistema rectangular de coordenadas: $A(1; 2)$, $B(4; -5)$, $C(5; 3)$.

△ Puesto que el área del paralelogramo construido sobre los vectores \vec{AB} y \vec{AC} es igual a $|\vec{AB}, \vec{AC}|$, el área del triángulo ABC se calcula según la fórmula

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{AB}, \vec{AC}|.$$

Ahora de acuerdo con la fórmula (5) del 22 obtenemos

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \left| k \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |31k| = \frac{31}{2} \text{ (unidades cuadradas)}. \blacktriangle$$

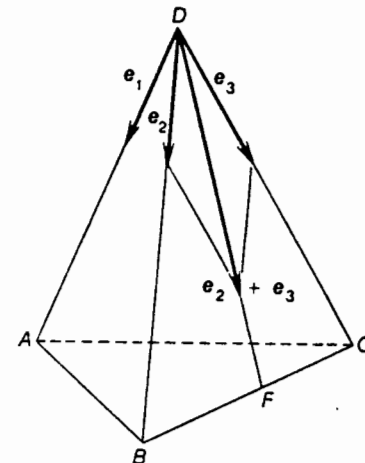


Fig. 65

Así pues, para calcular el área del triángulo se puede hallar el producto vectorial de dos vectores construidos sobre cualesquiera de sus dos lados, y, luego, calcular la mitad de su longitud.

Problema 10. Calcúlese el área del paralelogramo, cuyos tres vértices sucesivos $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$, $C(5; 2; 6)$ están dados por sus coordenadas en un sistema rectangular.

△ Como $S_{\square} = |\vec{AB}; \vec{BC}|$, y de acuerdo con la fórmula (4) del § 22

$$|\vec{AB}; \vec{BC}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 9 \end{vmatrix} = -12i + j + 4k.$$

entonces,

$$S_{\square} = \sqrt{12^2 + 2^2 + 8^2} = \sqrt{784} = 28 \text{ (unidades cuadradas)}. \blacktriangle$$

De este modo, para calcular el área del paralelogramo se puede hallar el producto vectorial de dos vectores construidos sobre cualesquiera de sus dos lados adyacentes, y, luego, calcular su longitud.

Problema 11. Calcúlese el trabajo efectuado por la fuerza $F = (1; 2; 3)$ cuando un punto material se desplaza rectilíneamente de la posición $B(1; 0; 0)$ a la posición $C(10; 1; 2)$.

△ Como se sabe del curso de física, el trabajo de una fuerza constante, cuando un punto material se desplaza rectilíneamente de la posición B a la posición C , es igual a

$$A = |F| \cdot |\vec{BC}| \cos(\widehat{F; \vec{BC}}),$$

es decir, $A = F \cdot \vec{BC}$.

En nuestro caso $F = (1; 2; 3)$, $\vec{BC} = (9; 1; 2)$, por lo tanto, según la fórmula (2) del § 19 obtenemos $A = 1 \cdot 9 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 17$ (unidades de trabajo). ▲

De este modo, para hallar el trabajo de una fuerza constante F cuando un punto material se desplaza a lo largo del segmento BC , es suficiente calcular el producto vectorial del vector de fuerza F y del vector de desplazamiento \vec{BC} .

Problema 12. La fuerza $F = (3; 2; 1)$ está aplicada al punto $A(2; 0; 1)$. Determínese el momento M de esta fuerza respecto al punto $O(0; 0; 0)$.

$$\Delta M = [\vec{OA}; F] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2i + j + 4k. \blacktriangle$$

Así pues, para determinar el momento de la fuerza F aplicada al punto A respecto al punto O es suficiente calcular el producto vectorial del vector \vec{OA} por el vector F .

Problema 13. Demuéstrase que los cuatro puntos $M_0(1; 2; -1)$, $M_1(0; 1; 5)$, $M_2(-1; 2; 1)$, $M_3(2; 1; 3)$ están situados en un mismo plano.

△ Cuatro puntos están situados en un mismo plano cuando y sólo cuando los vectores $\vec{M_0M_1}$, $\vec{M_0M_2}$, $\vec{M_0M_3}$ son coplanares. Por lo tanto, su producto mixto deberá ser igual a cero.

Puesto que $\vec{M_0M_1} = (-1; -1; 6)$, $\vec{M_0M_2} = (-2; 0; 2)$ y $\vec{M_0M_3} = (1; -1; 4)$, entonces

$$\begin{aligned} (\vec{M_0M_1}; \vec{M_0M_2}; \vec{M_0M_3}) &= \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \\ &+ 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 10 + 12 = 0. \end{aligned}$$

Por consiguiente, los puntos M_0 , M_1 , M_2 y M_3 están situados en un mismo plano. ▲

Así pues, para determinar si los cuatro puntos $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ pertenecen a un mismo plano es suficiente convencerse de que el determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix}$$

es igual a cero.

Problema 14. Calcúlese el volumen de la pirámide, cuyos vértices se encuentran en los puntos $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(1; 2; 3)$.

Δ El volumen de la pirámide $ABCD$ es seis veces menor que el volumen del paralelepípedo con las aristas $[AB]$, $[AC]$ y $[AD]$. Por lo tanto

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{AB}; \vec{AC}; \vec{AD})|.$$

Calculemos el producto mixto de los vectores \vec{AB} , \vec{AC} y \vec{AD} según la fórmula (1) del § 24:

$$(\vec{AB}; \vec{AC}; \vec{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -8.$$

Por consiguiente, $V = \frac{4}{3}$ (unidades cúbicas). \blacktriangle

De este modo, el volumen V de la pirámide con los vértices en los puntos $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, $D(x_4; y_4; z_4)$ puede ser calculado por la fórmula

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \right|.$$

Problemas para el capítulo I

1.1. Por los vectores dados a y b constrúyanse los siguientes vectores:

a) $b - a$; b) $-b - a$; c) $2a - b$; d) $\frac{1}{2}a - 2b$; e) $-\frac{1}{5}a$.

1.2. En la figura 66 la circunferencia está dividida en tres, cuatro o seis arcos congruentes. Hállese en cada caso la suma de los vectores representados en las figuras.

1.3. Hállese la suma $a + b + c$ para los vectores a, b, c representados en la figura 67.

1.4. Dos fuerzas F_1 y F_2 actúan sobre un punto material. Hállese la magnitud de su resultante, si $|F_1| = 8H$, $|F_2| = 6H$ y $(F_1; F_2) = 90^\circ$.

1.5. Trácese cualquier pentágono $ABCDE$ y hállese la suma de los vectores $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{DE}, \vec{EA}$.

1.6. Tres fuerzas dirigidas a tres vértices sucesivos están aplicadas al centro de un hexágono regular. Hállese la magnitud de la resultante, si la magnitud de cada una de las fuerzas dadas es igual a 1 N.

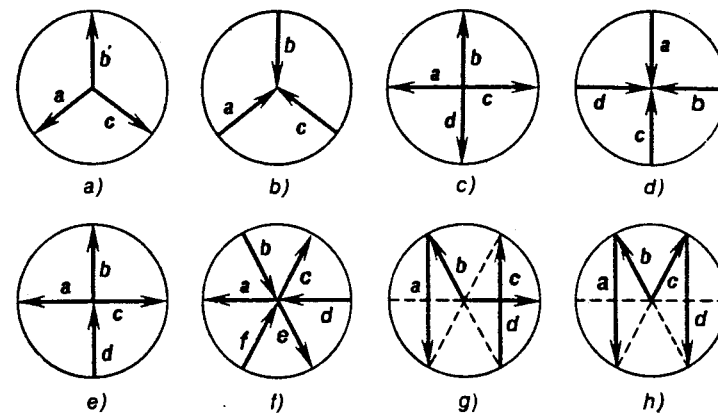


Fig. 66

1.7. Hállese la resultante de tres fuerzas aplicadas al punto M , si se sabe que estas fuerzas se representan por los vectores $\vec{MA}, \vec{MB}, \vec{MC}$, donde los puntos A, B, C son los vértices de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia con el centro O (fig. 68).

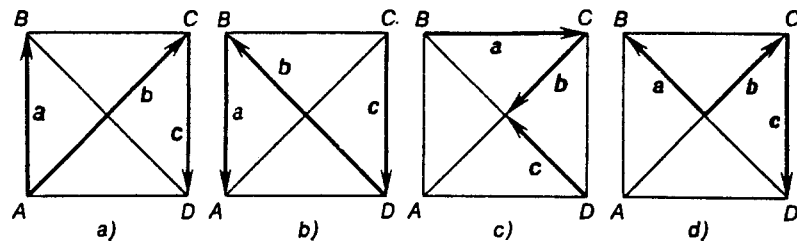


Fig. 67

1.8. Demuéstrase que de las medianas de cualquier triángulo se puede construir un triángulo.

1.9. Se da un tetraedro $ABCS$. Hállese la suma de los vectores:

a) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CS}$; b) $\vec{AC} + \vec{CS} + \vec{SA} + \vec{AB}$.

1.10. Se da una pirámide cuadrangular regular $ABCD$ (S es el vértice, O es la base de la altura). Demuéstrase que la suma de los vectores $\vec{OS}, \vec{DS}, \vec{BC}, \vec{SB}, \vec{AO}$ es igual a la suma de los vectores $\vec{AS}, \vec{AD}, \vec{AB}, \vec{DA}$.

1.11. Sea que $a = kb$ ($a \neq 0$). ¿Para qué valores de k : a) $|a| = |b|$; b) $|a| > |b|$; c) $|a| < |b|$?

1.13. Determinéense los valores de k , para los cuales la longitud del vector ka ($a \neq 0$): a) es igual a la longitud del vector a ; b) es mayor que $|3a|$; c) es menor de $|5a|$.

1.13. Determinéense el número, por el cual hay que multiplicar el vector no nulo a , para obtener tal vector b , que: a) $|b| = 5$ y $a \uparrow b$; b) $|b| = 1$ y $a \uparrow b$.

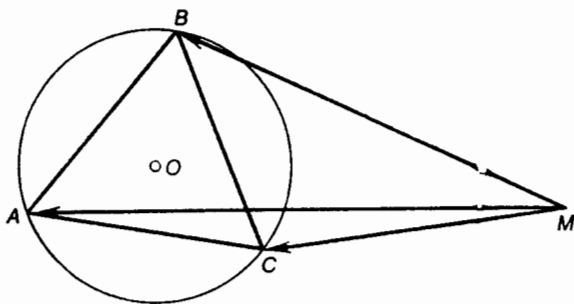


Fig. 68

1.14. En una recta se toman sucesivamente tres puntos M, N y P ; el punto A es el punto medio del segmento MN , y el punto B , el punto medio del segmento NP . Expresese el vector \vec{AB} por medio del vector \vec{PM} .

1.15. En una recta se toman tres puntos A, B, C de manera, que $\vec{CA} = 3\vec{CB}$. Expresese el vector \vec{AB} por medio del vector \vec{CB} .

1.16. En el rectángulo $ABCD$ están trazadas las diagonales: $\vec{DB} = a$; $\vec{AC} = b$. Preséntense los vectores $\vec{BC}, \vec{CB}, \vec{BD}, \vec{AD} + \vec{CD}$ en forma de una combinación lineal de los vectores a y b .

1.17. En el paralelogramo $ABCD$: $\vec{AB} = a, \vec{AD} = b, O$ es el punto de intersección de las diagonales. Desarrólense los vectores $\vec{BD}, \vec{OB}, \vec{AC}$ y \vec{CO} en vectores a y b .

1.18. En el trapecio isósceles $ABCD$ la magnitud del ángulo BAD es igual a 60° , $|AB| = |BC| = |CD| = 2$. Los puntos M y N son los puntos medios de los lados BC y DC . Desarrólense los vectores $\vec{AB}, \vec{CD}, \vec{BC}, \vec{AM}, \vec{AN}$ y \vec{MN} , en vectores $m = \frac{\vec{AB}}{|AB|}$ y $n = \frac{\vec{AD}}{|AD|}$.

1.19. En una circunferencia con el centro O se dan los puntos A y B . Las tangentes a la circunferencia en estos puntos se intersecan en el punto C . Desarrólense el vector \vec{OC} en vectores \vec{OA} y \vec{OB} , si:

a) $\widehat{AOB} = 60^\circ$; b) $\widehat{AOB} = 90^\circ$.

1.20 Se da el cubo $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Hállese el desarrollo en vectores $a = \vec{AB}, b = \vec{AD}, c = \vec{AA}_1$, de los vectores: a) \vec{AC}_1 ; b) \vec{AB}_1 ;

c) $\vec{D_1 C_1}$; d) $\vec{B_1 D_1}$; e) \vec{BC} ; f) $\vec{C_1 C}$; g) $\vec{B_1 D}$; h) $\vec{B_1 O}$, donde O es el centro del cubo.

1.21. Se da el triángulo ABC . Tomando por base los vectores $e_1 = \vec{AB}, e_2 = \vec{AC}$, hállese las coordenadas de los vectores $\vec{AM}, \vec{BN}, \vec{CP}$ en esta base. Los puntos M, N, P son los puntos medios de los lados BC, AC, AB del triángulo.

1.22. Se da el hexágono regular $ABCDEF$. Tomando por base los vectores $e_1 = \vec{AF}, e_2 = \vec{AC}$, hállese las coordenadas de los vec-

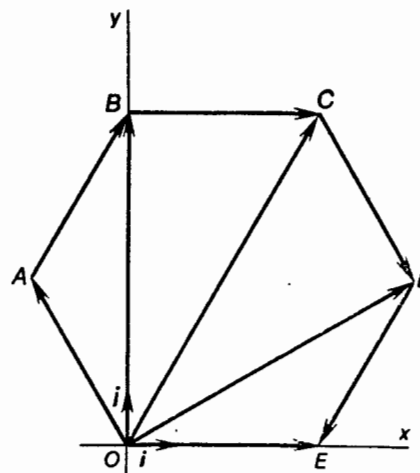


Fig. 69

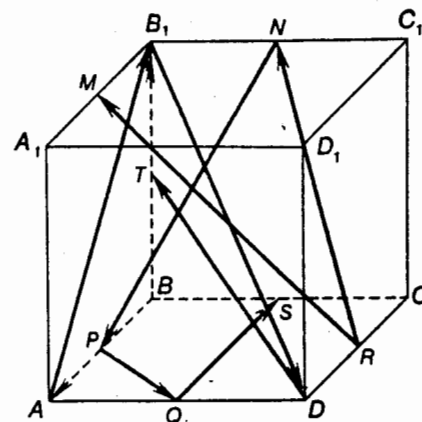


Fig. 70

tores siguientes: a) \vec{AB} ; b) \vec{BC} ; c) \vec{CD} ; d) \vec{DE} ; e) \vec{EF} ; f) \vec{AD} ; g) \vec{AE} ; h) \vec{FC} ; i) \vec{DB} ; j) \vec{BE} .

1.23. En el plano se da un hexágono regular. Desarrólense en versores i y j todos los vectores representados en la figura 69, si $|\vec{OE}| = 4$.

1.24. En el cubo $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (fig. 70) los puntos M, N, P, Q, R, S, T son los puntos medios de las aristas. Los vectores $i = \vec{BA}, j = \vec{BC}, k = \vec{BB}_1$ se toman por base. Desarrólense en la base i, j, k los vectores siguientes: a) \vec{DT} ; b) \vec{AB}_1 ; c) \vec{NP} ; d) \vec{PQ} ; e) \vec{QS} ; f) $\vec{B_1 D}$; g) \vec{RM} ; h) \vec{RN} .

1.25. En un sistema cartesiano rectangular de coordenadas se dan los puntos $A(3; -1; 2)$ y $B(-1; 2; 2)$. Hállese las coordenadas de los vectores \vec{AB} y \vec{BA} , sus longitudes y coordenadas del vector unitario, dirigido como el vector \vec{BA} .

1.26. Se da el vector $a = 2i - 3j + 4k$. Hállese el vector b , si $|a| = |b|$, la abscisa del vector b es igual a la ordenada del vector a y la ordenada del vector b es igual a cero.

1.27. Calcúlese las longitudes de las diagonales de un paralelogramo construido sobre los vectores $a = i + j$ y $b = k - 2j$.

1.28. Hállese la proyección del vector a sobre la dirección del vector b , y la proyección del vector b sobre la dirección del vector a ,

si $|a| = 2$, $|b| = 1$, $(a; b) = 120^\circ$.

1.29. Hállese el producto escalar de los vectores a y b , si $|a| = 4$, $|b| = 6$ y $(a; b)$ es igual a: a) 45° ; b) 0° ; c) 135° ; d) 90° ; e) 180° .

1.30. El ángulo entre los vectores a y b es igual a 120° . Sabiendo que $|a| = 5$, $|b| = 4$, calcúlese: a) $a \cdot b$; b) a^2 ; c) $(a - 2b) \cdot (a + 2b)$; d) $(a - b)^2$; e) $(7a + b)^2$.

1.31. Calcúlese:

a) $i \cdot (j + k) + j \cdot (3i - k) + k \cdot (i + 2j)$;

b) $i \cdot (i + j + k) + j \cdot (i + j + k) + k \cdot (i + j + k)$.

1.32. Calcúlese $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$, si $a + b + c = 0$ y $|a| = |b| = |c| = 1$.

1.33. Se dan los vectores $a = (4; -2; 0)$ y $b = (1; 2; 3)$. Calcúlese: a) $a \cdot b$; b) b^2 ; c) $(a - b)^2$; d) $(3a - b) \cdot (2a + 3b)$.

1.34. Se da el vector $a = (3; -4)$. Hállese las coordenadas de los vectores unitarios perpendiculares al vector a .

1.35. Se da el vector $c = (4; -7)$. Hállese las coordenadas de cualquier vector perpendicular al vector c . ¿Cuántas soluciones tiene el problema?

1.36. Se da el vector $a = (1; 2; -3)$. Se sabe que la abscisa del vector b perpendicular a éste es igual a 3, y la ordenada es igual a 6; se requiere hallar la z-coordenada del vector b .

1.37. Se da el vector $a = (3; -4)$. Se sabe que la abscisa del vector b perpendicular a éste es igual a 8; determínese la ordenada del vector b .

1.38. Se da el vector $a = (5; 3)$. Se sabe que la ordenada del vector b perpendicular a éste es igual a 10; determínese la abscisa del vector b .

1.39. Hállese el valor α con el cual los siguientes vectores son perpendiculares entre sí:

a) $a = \alpha i + 3j + 4k$ y $b = 4i + \alpha j - 7k$;

b) $a = (\alpha; -3; 2)$ y $b = (1; 2; -\alpha)$;

c) $a = (0; -2; 7)$ y $b = (\alpha, 14, 4)$.

1.40. Hállese los valores de α y β con los cuales los vectores $a = (3; -1; \alpha)$ y $b = (2; \beta; 1)$ son perpendiculares entre sí, si $|b| = 3$.

1.41. En el plano xOy hállese el vector b perpendicular al vector $a = 3i - 4j + 5k$, si $|b| = |a|$.

1.42. Se dan dos vectores: $a = (3; -4; 5)$ y $b = (1; 2; -3)$. Hállese el vector x que es perpendicular al eje Oz y satisfaga las condiciones $x \cdot a = 9$, $x \cdot b = -4$.

1.43. Hállese el vector b , colineal al vector a , que satisfaga a la condición dada:

a) $a = 2i + j - k$, $b \cdot a = 3$;

b) $a = (-1; 2; 2)$, $b \cdot a = -2$.

1.44. Hállese el vector b , cuya longitud es igual a 50, que es colineal al vector a y forma un ángulo agudo con el eje dado:

a) $a = 2i - 3j - 6k$, eje Ox ;

b) $a = (6; -8; -7,5)$, eje Oz .

1.45. Se dan tres vectores: $a = (2; -1; 3)$, $b = (1; -3; 2)$, $c = (3; 2; -4)$. Hállese el vector x que satisfaga las condiciones $x \cdot a = -5$, $x \cdot b = -11$, $x \cdot c = 20$.

1.46. Hállese el coseno del ángulo entre el vector $a = (3; -4)$ y el eje Ox .

1.47. Hállese los cosenos de los ángulos entre el vector $a = (3; -4; 12)$ y los ejes de coordenadas.

1.48. Hállese el ángulo entre las diagonales de un paralelogramo construido sobre los vectores $a = 2i + j$ y $b = -j + 2k$.

1.49. Determínese el ángulo entre el vector $a = \vec{AB} + \vec{CD}$ y el eje de las abscisas, si $A (-2; 3)$, $B (0; 8)$, $C (5; 3)$ y $D (10; 5)$.

1.50. Determínese el ángulo entre los vectores: a) i y $j + k$; b) j e $i - k$; c) k y $2j - 3k$.

1.51. Determínese las magnitudes de los ángulos en el triángulo con los vértices $A (5; 0; 0)$, $B (1; 1; 1)$ y $C (3; -1; 2)$.

1.52. Se dan tres vértices sucesivos del paralelogramo: $A (-3; -2; 0)$, $B (3; -3; 1)$ y $C (5; 0; 2)$. Hállese el cuarto vértice D y el ángulo entre los vectores \vec{AC} y \vec{BD} .

1.53. Se da el triángulo con los vértices en los puntos $A (3; -2; 1)$, $B (3; 0; 2)$ y $C (1; 2; 5)$. Calcúlese el ángulo entre la mediana $[BD]$ y el lado $[AC]$.

1.54. Se da el cuadrángulo con los vértices en los puntos $A (2; -3; 1)$, $B (1; 4; 0)$, $C (-4; 1; 1)$ y $D (-5; -5; 3)$. Hállese el ángulo entre las diagonales $[AC]$ y $[BD]$.

1.55. Se da un triángulo con los vértices en los puntos $A (-1; 4; 1)$, $B (3; 4; -2)$ y $C (5; 2; -1)$. Calcúlese el coseno del ángulo del vértice B .

1.56. Se dan los vectores $a = (-2; 1; 1)$, $b = (1; 5; 0)$, $c = (2; 2; -1)$. Calcúlese: a) $pr_b a$; b) $pr_a b$; c) $pr_{a+b} c$; d) $pr_a (b + c)$; e) $pr_a (2b + c)$.

1.57. Determínese, si es derecha o izquierda la terna de los vectores a , b , c , si:

a) $a = -i - j$, $b = j$; $c = k$;

b) $a = i - j$, $b = j$, $c = i + j$;

c) $a = i - j$; $b = i + j$, $c = k$

(i, j, k forman la terna derecha).

1.58. Hállese el vector $[a; b]$ y represéntese, si:

a) $a = 2i$, $b = 3j$;

b) $a = 3i - 2k$, $b = 4k$;

c) $a = i + j + k$, $b = 2i - 3j + 4k$.

1.59. Hállese el área del paralelogramo construido sobre los vectores $a = (3; 4)$ y $b = (4; -3)$.

1.60. Se dan los vectores $a = (1; -2; 3)$, $b = (2; 2; -1)$, $c = (0; 1; -2)$, $d = (2; -1; 0)$. Calcúlese: a) $[a; b]$; b) $[a; c]$; c) $[b; c]$; d) $[a; d]$; e) $[(a + b); c]$; f) $[(a - b); c]$; g) $[(a + b); (d - c)]$; h) $[(a + 2d); c]$; i) $[(2a - 3b); (c + d)]$; j) $[(a - b); (3c + 2d)]$.

1.61. Hállese el área del triángulo con los vértices en los puntos $A (0; 2; 6)$, $B (4; 0; 0)$ y $C (8; -2; 0)$.

1.62. Se dan los vértices del paralelogramo: $A (1; -2)$, $B (-2; 2)$, $C (4; 10)$ y $D (7; 6)$. Calcúlese su área y altura.

1.63. La fuerza $F = 2i - 3j + 4k$ está aplicada al punto

- $M(4; 5; -2)$. Hállese la magnitud del momento de fuerza F respecto al origen de coordenadas.
- 1.64. Los vectores r_1, r_2, r_3 que forman la terna derecha son perpendiculares entre sí. Sabiendo que $|r_1| = 7, |r_2| = 5, |r_3| = 6$, calcúlese $(r_1; r_2; r_3)$.
- 1.65. Demuéstrase que $(r_1 + r_2; r_2 + r_3; r_3 + r_1) = 2(r_1; r_2; r_3)$.
- 1.66. Demuéstrase que los vectores r_1, r_2, r_3 que satisfacen la condición $(r_1; r_2) + (r_2; r_3) + (r_3; r_1) = 0$, son coplanares.
- 1.67. Calcúlese el volumen del paralelepípedo construido sobre los vectores $r_1 = a + b + c, r_2 = a - b + c$ y $r_3 = a - b - c$.
- 1.68. Muéstrase que el volumen de un paralelepípedo construido sobre las diagonales de las caras del paralelepípedo dado, que tienen un vértice común, es igual al volumen duplicado del paralelepípedo dado.
- 1.69. Determinése el producto mixto $(a; b; c)$ de los vectores $a = (0; 3; -1), b = (5; 0; 0), c = (7; -2; 4)$.
- 1.70. Determinése si son coplanares los vectores $a = (8; 5; -13), b = (-4; 2; 8), c = (4; 7; -4)$; si son coplanares, qué terna forman, derecha o izquierda.
- 1.71. Determinése si son coplanares los vectores $a = (-2; -1; -3), b = (-1; 4; 6), c = (1; 5; 9)$.
- 1.72. Hállese el volumen del paralelepípedo construido sobre los vectores $a = (1; 2; 3), b = (-1; 3; 4), c = (2; 5; 2)$.
- 1.73. El centro de gravedad de una barra homogénea se encuentra en el punto $M(2; -4)$, uno de sus extremos, en el punto $A(-1; 1)$. Determinése las coordenadas del otro extremo de la barra.
- 1.74. Se da el triángulo con los vértices en los puntos $A(2; -5), B(1; -2)$ y $C(4; 7)$. Hállese el punto de intersección de la bisectriz del $\angle B$ con el lado AC .
- 1.75. Demuéstrase, que si en la pirámide triangular regular $SABC$ unimos el vértice A con el punto M de intersección de las medianas de la cara opuesta, entonces $(AM) \perp (BC)$.
- 1.76. En el triángulo ABC los puntos A_1, B_1, C_1 son los puntos medios de los lados BC, AC, AB . Demuéstrase que los puntos de intersección de las medianas de los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ coinciden.
- 1.77. Demuéstrase que los puntos medios de las bases del trapecio y el punto de intersección de las prolongaciones de sus lados laterales pertenecen a una misma recta.
- 1.78. Los puntos M y N son los puntos medios de los lados AB y CD del cuadrángulo $ABCD$. Demuéstrase, que los puntos medios de las diagonales de los cuadrángulos $AMND$ y $BMNC$ son vértices de un paralelogramo o están situados en una misma recta.
- 1.79. Calcúlese el trabajo efectuado por la resultante de dos fuerzas $F_1(5; -1; 3)$ y $F_2(-3; -2; 4)$, cuando un punto material se desplaza rectilíneamente de la posición $B(10; 8; -2)$ a la posición $C(9; 4; 1)$.
- 1.80. La fuerza $F = 3i + k$ está aplicada al punto $A(2; 1; 4)$. Hállese el momento y la magnitud del momento de esta fuerza respecto al punto $O(2; -1; 3)$.
- 1.81. Dos fuerzas F_1 y F_2 están aplicadas a un punto material, además, $|F_1| + |F_2| = 4N$ y $(F_1; F_2) = 120^\circ$. Hállese el valor mínimo de la magnitud de la resultante de estas fuerzas.

1.82. Determinése si se encuentran en un mismo plano los cuatro puntos siguientes:

- a) $M_1(5; 2; -2), M_2(6; -3; 1), M_3(0; 4; 3), M_4(2; 0; -4)$.
 b) $M_1(3; 5; 1), M_2(2; 4; 7), M_3(1; 5; 3), M_4(4; 4; 5)$.

1.83. Los vértices de una pirámide se encuentran en los puntos $A(2; 1; -1), B(3; 0; 1), C(2; -1; 3)$ y $D(0; -7; 0)$. Hállese la altura de la pirámide bajada desde el vértice D .

1.84. En el plano se dan el cuadrángulo $ABCD$ y el punto M . Demuéstrase, que los puntos simétricos al punto M respecto a los puntos medios de los lados del cuadrángulo dado, son vértices de un paralelogramo.

1.85. Demuéstrase que las alturas de un triángulo arbitrario se intersecan en un solo punto.

1.86. Demuéstrase, que para que las diagonales de un cuadrángulo sean perpendiculares entre sí, es necesario y suficiente que las sumas de los cuadrados de las longitudes de sus lados opuestos sean iguales.

1.87. Un ciclista se mueve con una velocidad de 15 km/h en dirección norte y le parece, que el viento (que sopla con una velocidad de 9 km/h de cierto sitio del nordeste) está dirigido bajo un ángulo de 15° respecto a la línea de su movimiento. Hállese la dirección real del viento.

1.88. En el lado AB del triángulo ABC se da el punto P , por el cual están trazadas las rectas paralelas a sus medianas AM_1 y BM_2 . Estas rectas cortan los lados respectivos del triángulo en los puntos A_1 y B_1 . Demuéstrase que el punto medio del segmento A_1B_1 , el punto P y el punto de intersección de las medianas del triángulo dado están situados en una misma recta.