Geometría Analítica I

LECTURA 8

Ayudante: Guilmer González | Día 29 de octubre, 2015

El día de hoy veremos:

1 El Método de Newton

Consideremos el siguiente problema: **encontrar el cero de una función**, de manera particular, las raíces de un polinomio.

No siempre es posible dar con una expresión para describir los ceros de un polinomio, y más cuando el grado es grande, 5 es ya un problema. Existen fórmulas pero para casos muy particulares.

Para identificar la forma de los polinomios, estamos interesados en saber dónde están sus ceros o algunos de ellos. En la práctica siempre estaremos interesados en calcular de manera aproximada los ceros de una función. Un método numérico para encontrar cero de funciones, es el Método de Newton, el cual se basa en aproximar la función $f(x)$ por medio de un modelo lineal $m(x)$ en una vecindad de un punto $x = x_0$,

$$m(x) = ax + b \approx f(x)$$

para luego, encontrar el cero exacto del modelo lineal; este problema (el cero de la recta) que es más sencillo y debe ser resuelto eficientemente.

Datos: se cuenta con un punto de la gráfica $(x_0, f(x_0))$, y dado que la función es suave, es polinomial, contamos con la derivada de la función, por lo que es múy fácil obtener una representación para la recta que pasa por $(x_0, f(x_0))$ y es tangente a la gráfica de la función:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

El modelo $m(x)$ que se emplea para aproximar la función alrededor de $x = x_0$ es la recta tangente a la gráfica de la función en $(x_0, f(x_0)$, ahora resolvemos el cero $m(x) = 0$

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

y de ahí al despejar x obtenemos

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

es decir, encontramos el punto que corta al eje x. Esta será nuestra aproximación al cero de $f(x)$ a partir de x_0.

La idea detrás del método de Newton es usar el nuevo punto obtenido como una segunda aproximación y volver a aplicar este algoritmo, acercarnos a la solución (si esto es posible), lo que es válido para funciones muy suaves.

Observemos de manera gráfica el algoritmo, representado en la Figura 2.

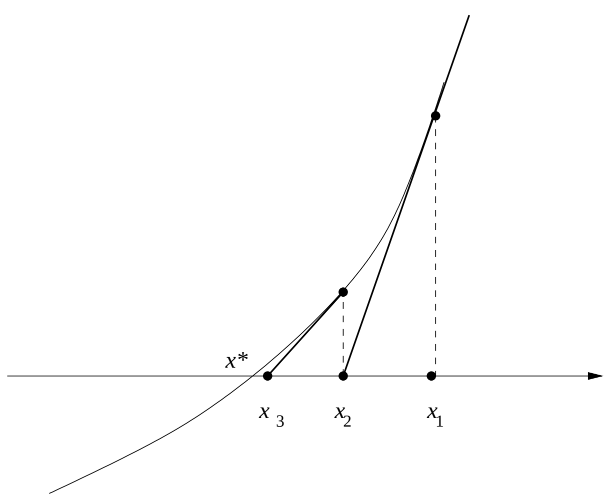

Figura 1: Proceso gráfico del Método de Newton.

Lo esencial de cada método es aquello que nos dice en su forma geométrica o en la analítica.

Este método para el paso $n+1$ se escribe

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n))}$$

el cual es iterativo, en el sentido de que partiendo de una aproximación, digamos $x = x_n$, la corregimos para lograr x_{n+1}, la nueva aproximación

$$x_{n+1} = x_n + c_n$$

donde

$$c_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n))}$$

es la corección a la aproximación x_n.

`Observar en clase que la aproximación primera, de la que se parte o condición inicial dependerá del problema a resolver. Observar que si estamos cerca de la solución, el método converge rápidamente.`

El método de Newton es un método iterativo que converge rápidamente si nos encontramos cerca de la solución, y bajo ciertas condiciones, sobre la derivada y segunda derivada, podemos asegurar convergencia al cero. `Comentar sobre la importancia del punto inicial.`

Ejemplo: Calcule las soluciones de $x^3 - x^2 - 4x - 1 = 0$.

Si observamos el lado derecho, tenemos para x una función, cúbica, $f(x) = x^3 - x^2 - 4x - 1$ y los ceros de ella, son las soluciones de la ecuación.

De entrada, es una función que está definida para cualquier valor de x, es decir, que dado un valor de x, obtenemos un valor $f(x)$, la evaluación de la expresión $x^3 - x^2 - 4 * x - 1$. La gráfica no se rompe. Los ceros de $f(x)$ son los puntos donde la gráfica de la función corta al eje x. Hacer un dibujo aproximado, claro.

Debemos encontrar un cero para ella. Si contamos, para $x = 0$, $f(x) < 0$, si $x = -1$, $f(x) > 0$, el cero se debe de encontrar entre 0 y -1. Propongamos como valor inicial $x = -1$.

El algoritmo nos dice: haga $x_0 = -1$, evalue $f(x_0)$ y $f'(x_0)$ para

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

evalue $f(x_1)$ y $f'(x_1)$ para, haciendo los cálculos tenemos:

$$x_1 = -1 - 1 = -2$$

para el siguiente paso:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

haciendo las cuentas,

$$x_2 = -2 - (-5)/12 = -1.5833$$

Si x_2 y es cercano a x_1 detener el procedimiento, si no es así, continuar, por lo que se ve, debemos ahcer otro paso (observe o evalue $f(x_2)$, si es cercanoa a cero, nos quedamos ahí) y para el siguiente paso:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

luego de 5 pasos, tenemos que

$$x_5 = -1.3772$$

y detenemos el proceso.

En clase se comentará un caso gráfico donde se puede presentar una serie de oscilaciones alrededor de un punto que no es cero, y que incluso podría llevarnos al cero (con un golpe de suerte). La gráfica de la función cúbica se muestra abajo

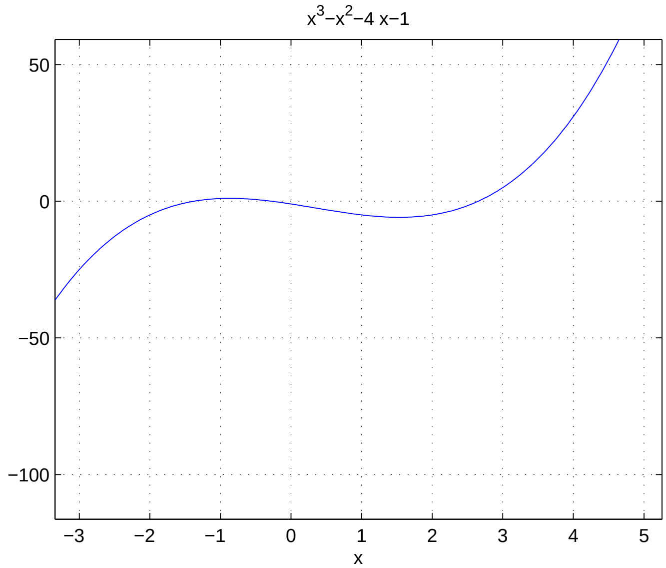

Figura 2: Gráfica de la cúbica (observe que tiene dos ceros cercanos).

Ejercicios: Calcular los ceros de las siguientes funciones a través del método de Newton:

1. $f(x) = 2x^2 - 3x - 4$
2. $f(x) = -3x^2 + x + 4$
3. $f(x) = x^3 - 2x - 1$
4. $f(x) = -2x^3 + x^2 + x - 1$

`Observar la rapidez de convergencia del método. Observar que no siempre esto ocurre, que existen casos patológicos, citar la referencia:`

`http://www.math.umn.edu/~garrett/qy/BadNewton.html`

`donde se trata de resolver el cero de`

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 0.4$$

Debemos asegurar un intervalo donde se encuentre el cero, y ahí experimentar. Mientras más pequeño sea éste, más rápido obtendremos una proximación al cero de $f(x)$, en realidad importa que la función sea ‘‘convexa’’ cerca del cero.