Geometría Analítica I

Lectura 7

Ayudante: Guilmer González

Día 13 de octubre, 2015

El día de hoy veremos:

1. Conjugados armńicos, teorema de las bisetrices y círculo de apolonio
2. Ejercicios

1 Conjugados armónicos, teorema de las bisectrices y círculo de apolonio

Definición: Dados cuatro puntos alineados W, Y, X y Z, se dice que Y y Z son armónicos conjugados con respecto a W y Z si

$$\frac{WY}{YX} = \frac{WZ}{XZ}$$

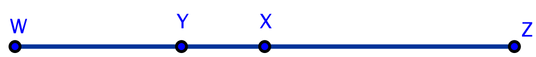

Figura 1: Conjugados armónicos.

Los conjugados armónicos son muy útiles, observe que si sobre un segmento de recta AB, determinamos un punto P que parta a ese segmento en la razón

$$\frac{AP}{PB} = k$$

la pregunta natural, es cómo determinar Q tal que $AQ/BQ = k$. El teorema de las bisectrices nos dice cómo lograrlo.

Teorema de las bisectrices En un triángulo ABC, trace la bisectriz interna en A. Esa recta corta a la recta que pasa por AB en P. Luego se cumple que

$$\frac{AP}{PB} = \frac{CA}{CB}$$

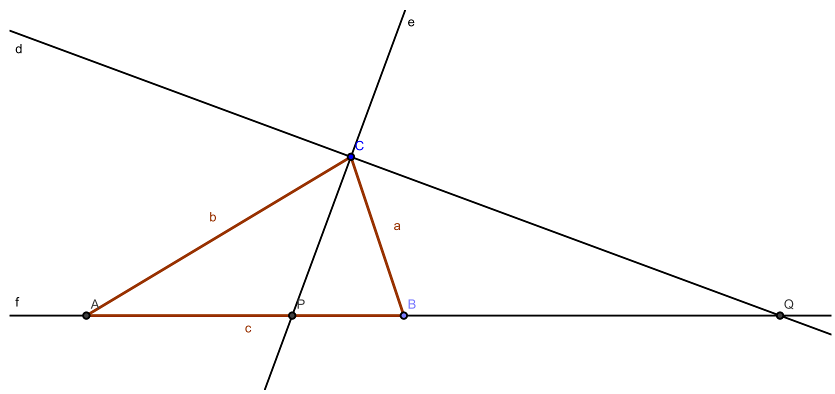

Figura 2: Las dos bisectrices a un vértice del triángulo.

Observe que se forman dos triángulos con la bisectriz, luego

$$\frac{\text{área}(APC)}{\text{área}(PBC)} = \frac{2 \cdot AP \cdot h}{2 \cdot PB \cdot h} = \frac{AP}{PB}$$

Ahora, si consideramos los mismos triángulos pero cuyos lados son AC y BC, tenemos que la distancia de E a la base AC es la misma que E a la base BC, ya que E está sobre la bisectriz, esto nos conduce a que

$$\frac{\text{área}(APC)}{\text{área}(PBC)} = \frac{CA}{CB}$$

y entonces, encontramos que

$$\frac{AP}{PB} = \frac{CA}{CB}$$

Observe que tenemos una relación entre la razón de segmentos deseados y los opuestos al triángulo.

Ahora tracemos la bisectriz externa que pasa por C, esta corta a la recta AB, en Q. Un razonamiento idéntico, pero ahora aplicado al triángulo $\triangle CAQ$ y $\triangle CBQ$ nos lleva a que

$$\frac{AQ}{BQ} = \frac{CA}{CB}$$

con lo cual tenemos que AB son conjugados armónicos de PQ:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{BQ}$$

Ahora bien, regresemos al problema original, qué puntos satisfacen que

$$\frac{AP}{PB} = k$$

La respuesta es correcta, son aquellos puntos C cuya bisectriz interna pasa por P. De la figura anterior, observe que PCQ es un ángulo recto, es decir, contienen al diámetro de una circunferencia, y entonces hemos dado con el lugar geométrico de los puntos que satisfacen esa relación: el círculo de Apolonio. Trace entre P y Q el punto medio M, y la circunferencia que tiene centro en M y radio PM o MQ, esa circunferencia pasa por C.

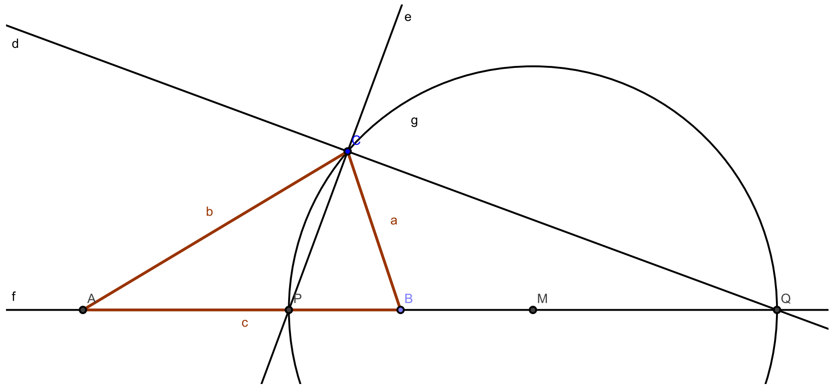

Figura 3: Círculo de Apolonio.

2 Ejercicio

Considere el triángulo $\triangle ABC$ de coordenadas $A(2,0)$, $B(14,8)$ y $C(12,12)$. Calcule las coordenadas de los tres círculos de apolonio.

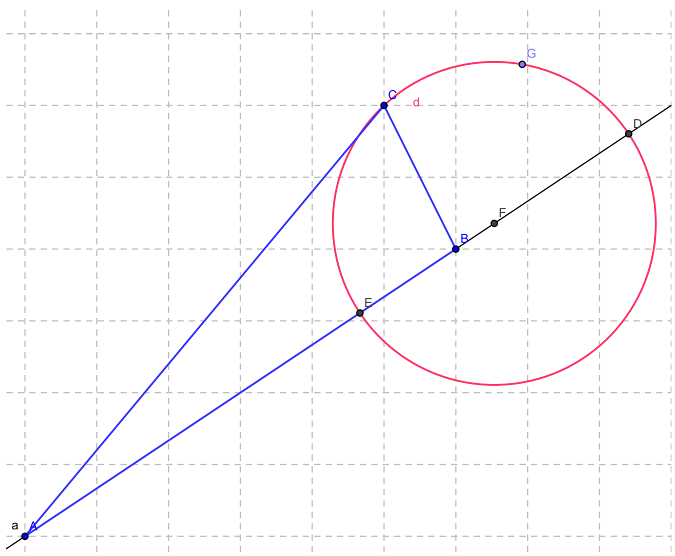

Figura 4: Círculo de Apolonio para el lado AB.