Geometría Analítica I

Lectura 6

Ayudante: Guilmer González   Día 8 de octubre, 2015

El día de hoy veremos:

0. Problemas comunes que se tuvieron con el trabajo pasado.

1. Coordenadas baricéntricas de puntos simpáticos.

1 Coordenadas baricéntricas de puntos del triángulo

A lo largo de este tema hemos dado una interpretación a las coordenadas homogéneas de un punto P relativas a los vértices de un triángulo $\triangle ABC$, hemos asociado la posición de ese punto P desde un origen O usando la normalización de las coordendas homogénas y ellas, las coordenadas normalizadas las conocemos como baricéntricas.

Veamos algunos puntos importantes dentro y fuera de un triángulo cualquiera y calculemos las coordenadas baricéntricas.

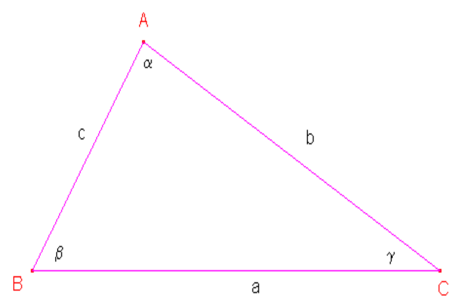

Figura 1: Un triángulo de referencia, sus lados y ángulos.

Baricentro (Gravicentro, centro de masa)

`Haga los pasos y muestre que` el baricentro $\mathcal{B}$ tiene coordenadas homogéneas

$$\mathcal{B} \longleftarrow (1,1,1)$$

El centro de masa es la intersección de las medianas, por lo que los puntos de la base, o de la la llamada "sombra", se encuentran a la mitad de cada vértice.

Incentro donde concurren las bisectrices.

El incentro es donde concurren las bisectrices. Si D es el pie de la bisectriz en C, por el teorema de las bisectrices se cumple que

$$\frac{CA}{CB} = \frac{AD}{DB} = \frac{b}{a}$$

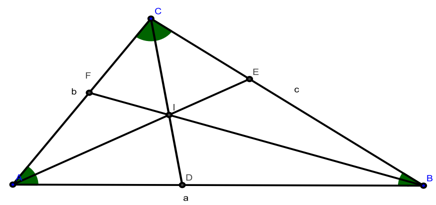

Figura 2: Incentro de un triángulo

es decir, que

$$\frac{AD}{DB} = \frac{b}{a}$$

y de ahí, que a A le podemos asignar una masa $M_A = a$ a B la masa $m_B = b$ para que D esté en equilibrio. Aplicando este teorema de las bisectrices a las restantes podemos concluir que (a, b, c) son las masas asociadas a I.

La representación baricéntrica no es única. Siguiendo la demostración del teorema de las bisectrices (o simplemente usando la ley de los senos) se puede ver que el incentro I tiene coordenadas

$$I \longleftarrow (\text{sen}\ \alpha, \text{sen}\ \beta, \text{sen}\ \gamma)$$

Ortocentro donde concurren las alturas.

Tomemos el triángulo de referencia, y tracemos las alturas de A, de B y C, los pies de las alturas les llamaremos L, M y N respectivamente

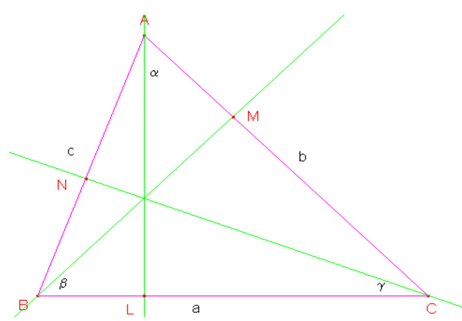

Figura 3: Las alturas del triángulo de referencia.

La idea de calcular las coordenadas, es ubicar adecuadamente las masas asociadas a los vértices, o bien, las distacias o razones en que el llamado "punto de la sobra" parte al segmento opuesto.

Usando trignometría es fácil ver que

$$\begin{aligned} BL &= c\cos\beta \\ LC &= b\cos\gamma \end{aligned}$$

la masa asociada a C es proporcional a $c\cos\beta$, y la masa asociada a B es proporcional a $b\cos\gamma$.

Siguiendo esta idea, y observando la figura anterior,

$$\begin{aligned} CM &= a\cos\gamma \\ LC &= c\cos\alpha \end{aligned}$$

es decir, la masa asociada a C es proporcional a $c\cos\alpha$, y la masa asociada a A es proporcional a $a\cos\gamma$.
Se observa que a C le hemos asociado dos masas distintas. Es importante "cuadrar" las masas, para lograrlo debe ser válido que

$$k_1\cos\beta = k_2\cos\alpha$$

para que podamos asignarle a C la masa $k_1\cos\beta$ así como la $k_2\cos\alpha$. Para lograrlo podemos elegir

$$k_1 = \cos\alpha, \qquad k_2 = \cos\beta$$

con este argumento, la masa asociada a C sería $c\cos\alpha\cos\beta$.

Si industrializamos esta idea, las masas asociadas al ortocentro H se escriben como

$$H \longleftarrow (a\cos\beta\cos\gamma, b\cos\alpha\cos\gamma, c\cos\alpha\cos\beta)$$

Ahora, calculemos el punto H usando esas coordenadas baricéntricas, para ello, debemos normalizar las masas. Desde un punto cualquier punto O, tracemos vectores, luego

$$\vec{OH} = \frac{a\cos\beta\cos\gamma\vec{OA} + b\cos\alpha\cos\gamma\vec{OB} + c\cos\alpha\cos\beta\vec{OC}}{a\cos\beta\cos\gamma + b\cos\alpha\cos\gamma + c\cos\alpha\cos\beta}$$

`Se puede usar la ley de los senos para encontrar representación de las coordenadas homogénas, inténtelo por puro deporte.`

Problema: Considere los puntos $A(\sqrt{3},1)$, $B(0,0)$, $C(1+\sqrt{3},0)$, encuentre el ortocentro y compruebe que lo es.

Circuncentro donde concurren las mediatrices. La idea general que hemos usado es, dado el punto, observar las "sombras" que se proyectan sobre el lado opuesto al lado, lo cual nos es inmediato observar la "masa" asociada a los vértices

Para las mediatrices, usaremos la misma idea de construcción de la demostración de concurrencia que se describe en el libro. Tracemos las mediatrices y observemos que con los puntos medios se forma otro triángulo, a saber $\triangle DEF$.

Por construcción, el circuncento O de $\triangle ABC$, es el ortocentro de $\triangle DEF$. Por otra parte, dado que se forman paralelogramos (use el Teorema de Tales), es fácil observar que $\angle FDE = \alpha$, $\angle DEF = \gamma$ y $\angle EFD = \beta$, por lo que las coordenadas baricéntricas para el ortocentro, en términos de DEF es

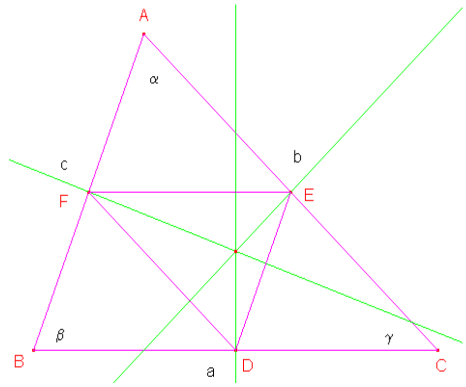

Figura 4: Mediatrices del triángulo de referencia.

$$\mathcal{O}=\frac{\frac{a}{2}\cos\beta\cos\gamma\vec{D}+\frac{b}{2}\cos\alpha\cos\gamma\vec{E}+\frac{c}{2}\cos\alpha\cos\beta\vec{F}}{\frac{a}{2}\cos\beta\cos\gamma+\frac{b}{2}\cos\alpha\cos\gamma+\frac{c}{2}\cos\alpha\cos\beta}$$

simplificando

$$\mathcal{O}=\frac{a\cos\beta\cos\gamma\vec{D}+b\cos\alpha\cos\gamma\vec{E}+c\cos\alpha\cos\beta\vec{F}}{a\cos\beta\cos\gamma+b\cos\alpha\cos\gamma+c\cos\alpha\cos\beta}$$

Ahora bien, como hemos considerado los puntos medios,

$$\vec{D}=\frac{\vec{B}+\vec{C}}{2},\quad \vec{E}=\frac{\vec{C}+\vec{A}}{2},\quad \vec{F}=\frac{\vec{A}+\vec{B}}{2}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
\mathcal{O} &= \frac{a\cos\beta\cos\gamma\frac{\vec{B}+\vec{C}}{2}+b\cos\alpha\cos\gamma\frac{\vec{C}+\vec{A}}{2}+c\cos\alpha\cos\beta\frac{\vec{A}+\vec{B}}{2}}{a\cos\beta\cos\gamma+b\cos\alpha\cos\gamma+c\cos\alpha\cos\beta}\\
\mathcal{O} &= \frac{\vec{A}(\frac{b\cos\alpha\cos\gamma+c\cos\alpha\cos\beta}{2})+\vec{B}(\frac{a\cos\beta\cos\gamma+c\cos\alpha\cos\beta}{2})+\vec{C}(\frac{a\cos\beta\cos\gamma+b\cos\alpha\cos\gamma}{2})}{a\cos\beta\cos\gamma+b\cos\alpha\cos\gamma+c\cos\alpha\cos\beta}\\
&= \frac{\vec{A}(\cos\alpha\cos\gamma+c\cos\alpha\cos\beta)+\vec{B}(a\cos\beta\cos\gamma+c\cos\alpha\cos\beta)+\vec{C}(a\cos\beta\cos\gamma+b\cos\alpha\cos\gamma)}{2(a\cos\beta\cos\gamma+b\cos\alpha\cos\gamma+c\cos\alpha\cos\beta)}
\end{aligned}$$

Simplifiquemos aquella expresión, hagamos $\Delta=a\cos\beta\cos\gamma+b\cos\alpha\cos\gamma+c\cos\alpha\cos\beta$, y observemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{O} &= \frac{\vec{A}(\Delta-a\cos\beta\cos\gamma)+\vec{B}(\Delta-b\cos\alpha\cos\gamma)+\vec{C}(\Delta-c\cos\alpha\cos\beta)}{2\Delta}\\
&= \frac{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}}{2}-\frac{1}{2}\vec{H}
\end{aligned}$$

lo que nos lleva a

$$
\begin{aligned}
2\mathcal{O} &= 3\frac{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}}{3} - \vec{H} \\
&= 3\mathcal{B} - \vec{H}
\end{aligned}
$$

es decir

$$
\mathcal{B} = \frac{2\mathcal{O} + \vec{H}}{3}
$$

los tres puntos están alineados, y nos muestra la proporción que guardan los puntos. Esos puntos pertencen a lo que se conoce como la recta de Euler.

Problema: Considere los puntos $A(\sqrt{3}, 1)$, $B(0, 0)$, $C(1 + \sqrt{3}, 0)$, encuentre el circuncentro y compruebe que lo es.