Geometría Analítica I

LECTURA 5

Ayudante: Guilmer González Día 6 de octubre, 2015

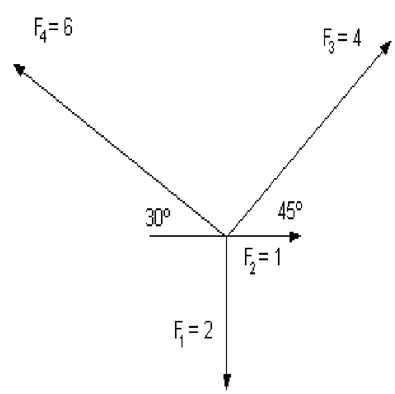
El día de hoy veremos: Coordenadas baricéntricas.

1 Coordenadas baricéntricas

El interés primero hacia un objeto geométrico es la descripción de éste por medio sistema local.

1.1 Interpretación física

Considere 4 vectores en el plano como se muestra en la figura



calcule la fuerza resultante.

Ahora bien, sobre cada fuerza que actúa sobre el punto P, duplique la fuerza, qué obtiene? esto es, cuál es la fuerza resultante? Dónde se encuentra el punto P? y si ahora cada fuerza que actúa sobre P considera la tercera parte y la aplica sobre P, qué obtiene?

Resultado: Las coordenadas baricéntricas no son únicas.

Ahora bien, en lugar de vectores, utilicemos una colección de n puntos $\{P_i\}$ en el plano, a cada punto le asignamos un escalar α_i con

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_n = 1$$

consideremos el vector

$$\vec{OP} = \alpha_1 \vec{OP_1} + \alpha_2 \vec{OP_2} + \cdots + \alpha_n \vec{OP_n}$$

¿Quién es $\vec{OP}$? ¿Quién es P? ¿Quién es P para $\beta\alpha_i$ con β constante distinta de cero?

Definición: Consideremos una colección de puntos $P_1, P_2, \ldots P_n$ y tomemos la colección de puntos P que se pueden escribir en la forma

$$P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \cdots \alpha_n P_n$$

donde

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_n = 1$$

Los puntos P forman un espacio, y las coordenadas

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

son llamadas las *coordenadas baricéntricas* de los puntos del espacio.

1.2 Un punto dentro de un triángulo

Consideremos tres puntos no colineales en un plano P_1, P_2 y P_3, si α_1, α_2 y α_3, son tales que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, tendremos que el punto P definido por

$$P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3$$

es un punto en el plano del triángulo formado por $P_1 P_2 P_3$.

Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in [0, 1]$, el punto se encuentra dentro del triángulo. Si alguno de ellos es negativo o mayor que 1, el punto P se encuentra fuera del triángulo.

`Preguntar qué pasa con` P `si alguna de` α_i `es cero.`

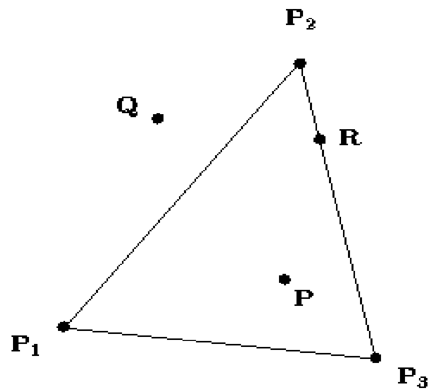


Figura 1: Puntos de referencia a partir de 3 fijos.

Observar la importancia de las coordenadas baricéntricas para localizar punto dentro de un triángulo o dentro de un polígono.

1.3 Localización de puntos

Consideremos un triángulo formado por los puntos P_1 P_2 y P_3. Sea P un punto dentro del triángulo, tracemos las cevianas que pasan por ese punto

Observamos que los pies de las cevianas las podemos representar como puntos de equlibrio entre dos vértices, por ejemplo

$$P_{12} = \frac{m_1 P_1 + m_2 P_2}{m_1 + m_2}$$

de manera similar poder localizar P_{23} y P_{31}. Con esta información, con el pie de la ceviana y el vértice opuesto, podemos localizar el punto P dentro del triángulo

$$P_{123} = \frac{(m_1 + m_2)P_{12} + m_3 P_3}{(m_1 + m_2) + m_3}$$

De manera análoga, podemos localizar el mismo punto tomando como referencia las otras cevianas y vértices

$$P_{123} = P_{231} = P_{312}$$

las coordenadas baricéntricas son (m_1, m_2, m_3)

Dado el punto P dentro del triángulo $\triangle$ formado por los puntos P_1, P_2 y P_3, encontrar las masas m_1, m_2 y m_3.

1.4 Ejemplo numérico

Consideremos el triángulo formado por los puntos $P_1(1,4)$, $P_2(0,0)$ y $P_3(3,0)$, ¿cuáles son las coordenadas baricéntricas de $P(1,1)$ con respecto a estos puntos?.

La idea para obtener la representación del punto en término de los puntos del triángulo, viene dada al considerar una de las cevianas que pasan por él y el pie de esa ceviana y el vértice opuesto.

Tracemos un segmento de recta que una P_1 con P y observemos el punto de intersección con el segmento $\overline{P_1 P_3}$.

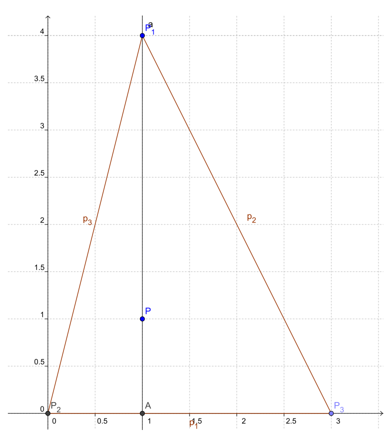


Figura 2: Trazando cevianas y calculando distancias.

Observamos que la distancia de esta intersección a P_3 es 2 y hacia P_2 es 1, por lo que asociamos 2 a P_2 y 1 a P_3. Con esto, a este punto P_{23} le asociamos la masa $m_2 + m_3$ y obsevamos que el punto P dista de P_1 a una distancia 1, por lo cual al punto P_1 le asociamos la masa $m_1 = 1$, con esto

$$P = \frac{1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 1 \cdot P_3}{1 + 2 + 1},$$

por lo que $(1, 2, 1)$ son las coordenadas baricéntricas del punto P.

En lugar de elegir esta ceviana, eligamos aquella que pasa por el vértice $P_3(3, 0)$

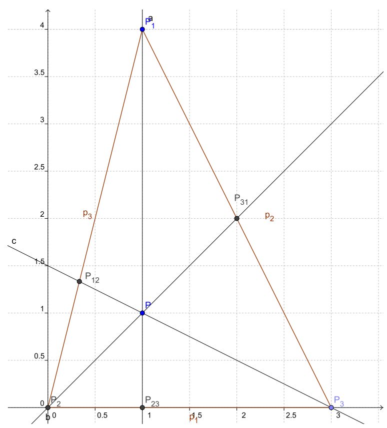


Figura 3: Trazando cevianas y calculando distancias.

Asignemos por d_1 a la distancia del pie (x, y) de esta ceviana sobre el segmento $\overline{P_1P_2}$ a P_1 y d_2 la distancia hacia P_2 sobre el mismo segmento. Encontremos esas longitudes para determinar las coordenadas baricéntricas.

Por una parte, tenemos que la relación

$$\frac{y}{x} = \frac{4}{1} = 4; \quad \text{con esto, } y = 4x$$

por otra parte

$$\frac{y-1}{x-1} = \frac{1-0}{1-3} = -\frac{1}{2}; \quad \text{con esto, } y = -1/2x + 3/2$$

de estas dos ecuaciones tenemos que

$$x = 1/3; \quad \text{y} \quad y = 4/3$$

que representa el pie de la ceviana elegida. Ahora, calculamos la distancia de ese punto a los vértices sobre el segmento obteniendo

$$d_1 = \frac{\sqrt{17}}{3}; \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{2\sqrt{17}}{3}$$

y al calcular la distancia de $P(1,1)$ al pie de la ceviana, tenemos la masa para asociar a P_3, logrando las coordenadas baricéntricas

$$(\frac{\sqrt{17}}{3}, \frac{2\sqrt{17}}{3}, \frac{\sqrt{17}}{3}); \quad \text{o bien,} \quad (1,2,1)$$

Ahora, hagámos otro ejemplo, pero de forma diferente, usando vectores. Consideremos el triángulo formado por los puntos $P_1(3,8)$, $P_2(1,2)$ y $P_3(5,3)$, calculemos las coordenadas baricéntricas de $P(4,4)$ con respecto a estos puntos.

Consideremos P como combinación lineal de vectores

$$\begin{aligned}
P_2\vec{P} &= \alpha P_2\vec{P}_3 + \beta P_2\vec{P}_1 \\
&= \alpha(\vec{P}_3 - \vec{P}_2) + \beta(\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \\
&= \alpha(4,1) + \beta(2,6) \\
&= \vec{P} - \vec{P}_2 = (3,2)
\end{aligned}$$

de donde se tiene el sistema

$$\begin{aligned}
4\alpha + 2\beta &= 3 \\
\alpha + 6\beta &= 2
\end{aligned}$$

con lo cual

$$\alpha = 14/22; \qquad \beta = 5/22$$

Ahora bien, de la combinación linea se tiene que

$$\begin{aligned} P &= P_2 + \alpha P_3 + \beta P_1 - \alpha P_2 - \beta P_2 \\ &= \beta P_1 + (1 - \alpha - \beta) P_2 + \alpha P_3 \end{aligned}$$

con lo que hemos obtenido las coordenadas baricéntricas de P con respecto a los otros puntos

$$(\beta, 1 - \alpha - \beta, \alpha)$$

para nuestro caso, las coordenadas baricéntricas para nuestro punto son:

$$(\frac{5}{22}, 2\frac{1}{22}, \frac{14}{22})$$

La relación

$$\vec{P} = (1 - t)\vec{P_1} + t\vec{P_2}$$

la podemos escribir como

$$\vec{P} = \frac{m_1\vec{P_1} + m_2\vec{P_2}}{m_1 + m_2}.$$

Los problemas que podemos atacar son los siguientes

1) Dado los puntos y las masas, localizar el centro de masa.

2) Dado un punto P, asignarle las masas a los puntos P_1 P_2 y P_3, para hacer que P sea el centro de masa.

Básicamente expresamos

$$\vec{P} = \frac{m_1\vec{P_1} + m_2\vec{P_2} + m_3\vec{P_3}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

para entonces asociar las coordenadas baricéntricas a $\vec{P}$

$$(m_1, m_2, m_3) \mapsto \vec{P}$$