# Geometría Analítica I
LECTURA 3

Prof: Pablo Barrera    Día 11 de octubre, 2015

El día de hoy veremos:

1. Observaciones sobre el centro de masa.
2. Centros de masa y vectores.

## 1 Observaciones sobre el centro de masas

**Problema 1** Se cuenta con un cuerpo de masa $m_1 = 500kg$ y otro de $m_2 = 90kg$, cómo encontramos el centro de masa, de tal manera que ambas cuerpos se encuentre en equilibro sobre una barra.

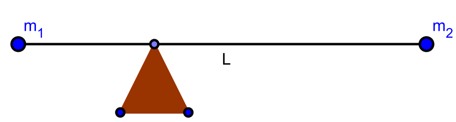


Figura 1: Un balancín con masas.

Vamos a suponer que la barra tiene una longitud $L$, la idea es econtrar $d_1$ la distancia entre el centro de masa y la masa $m_1$ y $d_2$ la distancia entre el centro de masa y $m_2$. La relación que encontramos para lograr el equilibrio es que

$$500d_1 = 90d_2$$

Vamos a suponer que $L = 1$, así $d_1 = 1 - d_2$, así

$$500(1-d_2)=90d_2$$

y con ello

$$d_2=\frac{500}{500+90}$$

por consiguiente

$$d_1=1-\frac{500}{590}=\frac{90}{590}$$

**Ejemplo 2** Consideremos una barra de longitud $L$, y a los extremos de ella dos masas $m_1$ y $m_2$. Dónde debe encontrarse el centro de masa.

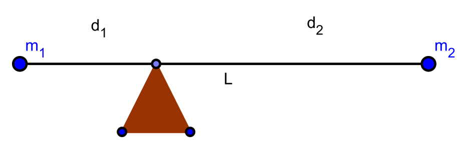


Figura 2: Ubicación del centro de masa en una barra de logitud $L$.

Si consideramos que el centro de masa de ubica a una distancia $d_1$ de la masa $m_1$ y a una distancia $d_2$ de la masa $m_2$, para lograr el equilibrio debe cumplirse que

$$m_1d_1=m_2d_2$$

pero recuerde $d_1+d_2=L$, multiplicando por $m_1$ y la relación anterior, tenemos

$$\begin{aligned} m_1d_1+m_1d_2 &= m_1L \\ m_1d_1-m_2d_2 &= 0 \end{aligned}$$

así

$$d_2(m_1 + m_2) = m_1 L$$

es decir

$$d_2 = \frac{m_1 L}{m_1 + m_2}$$

y con esto

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{m_2}{m_1} d_2 \\ &= \frac{m_2}{m_1} \frac{m_1 L}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{m_2 L}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

**Problema 3** Se conocen $d_1$ y $d_2$, y por ende $L$. Encontrar $m_1$ y $m_2$ para lograr el equilibrio.

**Problema 4** La idea del punto de equilibrio puede ser relacionado directamente con el problema del balancín. Donde es necesario encontrar una relación entre las masas y la longitud de la barra. Básicamente

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} L \\ d_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} L \end{aligned}$$

A partir de esto, del anterior problema a este, es claro que si $d_1 = 2.4u$ y $d_2 = 7.3u$, podemos tomar por masa a $m_1 = 7.3um$ y $m_2 = 2.4um$.

## 2 Centros de masa y vectores

La relación entre la distancia y las masas, la podemos escribir de manera equivalente como

$$
\begin{aligned}
\frac{d_1}{L} &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \\
\frac{d_2}{L} &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}
\end{aligned}
$$

Si el punto $P$ parte al segmento $L$ entre $P_1$ y $P_2$, en una razón $d_1 : d_2$, como se muestra en la figura siguiente,

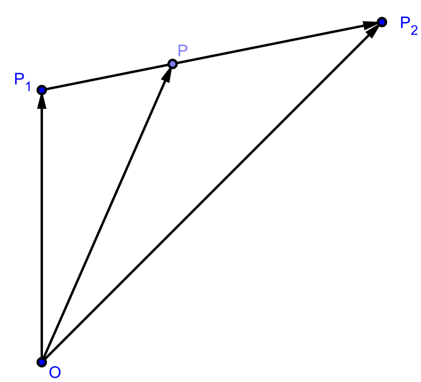


Figura 3: Punto de equilibrio a través de vectores.

escribimos

$$
\begin{aligned}
OP &= O\vec{P}_1 + P_1\vec{P} \\
&= O\vec{P}_1 + \frac{d_1}{L} P_1\vec{P}_2 \\
&= \vec{P}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{P}_2 - \vec{P}_1
\end{aligned}
$$

haciendolas cuentas, el vector de posición $\vec{P}$ lo expresamos:

$$\vec{P} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{P}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{P}_2$$

De lo anterior, se observa que

$$d_1 = km_2 \qquad d_2 = km_1$$

por lo que el punto $P$ lo podemos localizar de diferente forma, con masas o con distancias. A la pareja $(m_1, m_2)$ les conoceremos como las coordenadas baricéntricas de $P$.

**Observación 5** Las coordenadas baricéntricas no son únicas.

$$\vec{P} = \frac{m_1 P_1 + m_2 P_2}{m_1 + m_2}$$

**Problema 6** Considere dos puntos y una barilla. ¿De qué forma podemos colocar un punto de equilibrio afuera de los puntos?

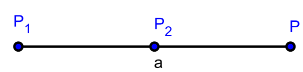


Figura 4: Ubicación de un punto de equilibrio afuera de dos dados.

**Ejemplo 7** Consideremos dos puntos, para colocar un punto $P$ a distancia 1 del punto $P_2$ y a distancia 2 del punto $P_1$, necesitamos

$$P = \frac{-1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2}{-1 + 2}$$

Dado dos puntos, $P_1$ $P_2$, podemos asignarles sus coordenadas baricéntricas

**Ejemplo 8** Consideremos dos puntos $P_1$ a una distancia 1 de un punto $P$ y el punto $P_2$ sobre la misma barilla a una distancia 2 de ese punto, con esto la posición del punto $P$ la obtenemos

$$x = \frac{2 \cdot x_1 + (-1)x_2}{2 + (-1)} = 0.$$

**Problema 9** Dados dos puntos $P_1$ y $P_2$, podemos localizar un punto $P$ entre ellos de la forma

$$\vec{P}(t) = (1-t)\vec{P}_1 + t\vec{P}_2, \quad 0 \leq t \leq 1$$

lo cual tiene una representación del centro de masa.

Con esto, las coordenadas baricéntricas del punto $\vec{P}$ son $(1-t, t)$, que no están unívocamente determinadas, ya que $(k(1-t), kt)$ también son coordenadas baricéntricas del mismo punto.

**Problema 10** Consideremos un punto $P$ entre otros dos, a una distancia 4 del punto $P_1$ y a una distancia 1 de $P_2$.

La localización del punto se expresa como

$$P = \frac{1}{5}P_1 + \frac{4}{5}P_2$$

sus coordenadas baricéntricas son $(1, 4)$.

De manera general tenemos

$$P = \frac{m_1 P_1 + m_2 P_2}{m_1 + m_2}$$

aquílas coordenadas baricéntricas de $P$ son $(m_1, m_2)$.