Geometría Analítica I

Lectura 2

Ayudante: Guilmer González Día 8 de octubre, 2015

El día de hoy veremos:

0. Sobre el tema de vectores. Comentarios.
1. Punto de intersección entre medianas, ejemplo numérico en forma vectorial.
2. Punto de intersección entre medianas, representación general.

1 Forma paramétrica de una recta a partir de dos puntos

Contando con dos puntos es posible determinar los puntos sobre de la recta mediante vectores. Si P es un punto sobre la recta entonces se cumple que

$$\vec{AP} \parallel \vec{AB}$$

esto nos lleva a

$$\vec{AP} = \alpha \vec{AB}$$

y desde sistema en O escribimos

$$\vec{p} - \vec{a} = \alpha(\vec{b} - \vec{a})$$

y de ahí

$$\vec{p} = (1 - \alpha)\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

Note dos cosas. Si α se encuentra entre cero y uno, P es un punto sobre el segmento AB. Si $\alpha > 1$ el punto P se encuentra fuera del segmento y cerca del punto B. Si $\alpha < 0$ el punto P se encuentra fuera del segmento y cerca del punto A.

Ahora bien, esta representación

$$\vec{AP} = \alpha \vec{AB}$$

establece que

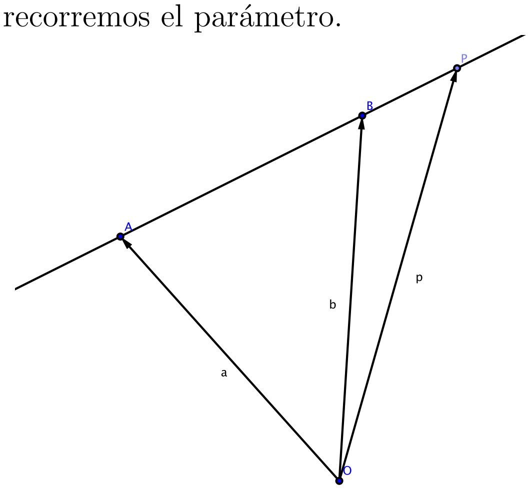
$$\text{longitud}(AP) = |\alpha| \cdot \text{longitud}(AB)$$

donde hemos tomado el valor absoluto de α para comparar las longitudes sin importar la dirección de los vectores.

Esta no es la única forma de describir la recta. Podemos obtener una representación si consideramos

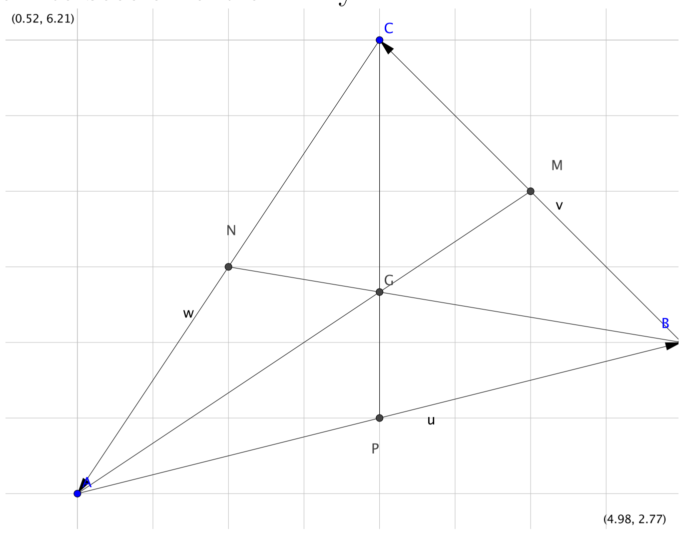
$$\begin{aligned}
\vec{AP} &= \beta \vec{BP} \\
\vec{AB} &= \delta \vec{AP} \\
\vec{AB} &= \gamma \vec{BP} \\
\vec{BP} &= \epsilon \vec{BA}
\end{aligned}$$

cada una de estas condiciones representa una parametrización de la recta y el parámetro en cuestión tiene un significado geométrico de como recorrer la recta conforme recorremos el parámetro.



2 Punto de intersección entre medianas, ejemplo numérico

Considere el triángulo formado por $A(1,3)$, $B(5,4)$ y $C(3,6)$. Sea M el punto medio del segmento $\bar{BC}$ y sea N el punto medio del segmento $\bar{CA}$. Encuentre el punto G de intersección entre $\bar{AM}$ y $\bar{BN}$.



Calculemos los puntos medios M y N. Usaremos la fórmula del punto medio que hemos otenido para los vectores

$$\begin{aligned}
\vec{OM} &= \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC}) \\
&= \frac{1}{2}((5,4) + (3,6)) \\
&= (4,5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{ON} &= \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OC}) \\
&= \frac{1}{2}((1,3) + (3,6)) \\
&= (2,9/2)
\end{aligned}$$

Ahora, el punto G se encuentra sobre la recta que pasa por A y M, por lo que usando la parametrización de la recta tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{OG} &= \vec{OA} + t\vec{AM} \\ &= \vec{OA} + t(\vec{OM} - \vec{OA}) \\ &= (1-t)\vec{OA} + t\vec{OM} \end{aligned}$$

de manera análoga, el punto G se encuentra sobre la recta que pasa por B y N con lo cual

$$\vec{OG} = (1-s)\vec{OB} + s\vec{ON}$$

el punto G está en ambas rectas, lo cual significa que debe haber un valor de t y un valor de s donde eso ocurra. Igualamos

$$\begin{aligned} (1-t)\vec{OA} + t\vec{OM} &= (1-s)\vec{OB} + s\vec{ON} \\ (1-t)(1,3) + t(4,5) &= (1-s)(5,4) + s(2,9/2) \\ (1+3t, 3+2t) &= (5+3s, 4+s/2) \end{aligned}$$

lo que nos lleva al sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 1+3t &= 5+3s \\ 3+2t &= 4+2/2 \end{aligned}$$

resolviendo nos queda que $s = 2/3$ y que $t = s$. Esto significa que G parte a AM en $2/3$ y G parte a BN en la misma cantidad. Haciendo las cuentas, tenemos que: $G(3, 13/3)$.

3 Punto de intersección entre medianas

Consideremos un triángulo ABC. Desde un punto de referencia O (el origen del sistema coordenado u otro) tenemos los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$. Con esto, es fácil ver que:

$$
\begin{aligned}
\vec{AB} &= -\vec{OA} + \vec{OB} = -\vec{a} + \vec{b} \\
\vec{BC} &= -\vec{OB} + \vec{OC} = -\vec{b} + \vec{c} \\
\vec{CA} &= -\vec{OC} + \vec{OA} = -\vec{c} + \vec{a}
\end{aligned}
$$

Determinemos la posición del vector cuyo punto corta a dos medianas, el cual es fácil ver que es el mismo para cualesquiera pareja de medianas del triángulo.

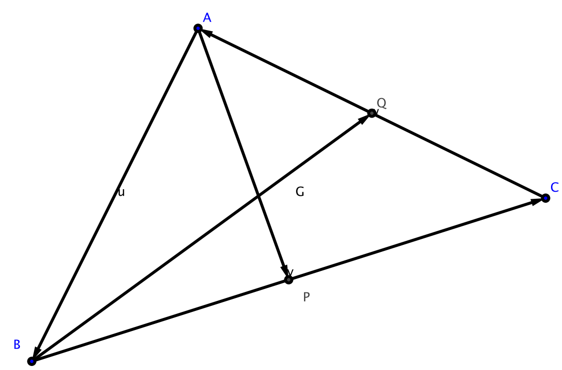


Figura 1: Intersección de medianas.

Sea P el punto de la mediana que pasa por A y por $\bar{BC}$, y Q el punto que pasa por la mediana en B. Sea G el punto de intersección entre ambas medianas. Veamo cómo representar G en términos de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

Por una parte, la mediana AP se encuentra sobre la línea que definen estos puntos, por consiguiente, usando una parametrización de ella tenemos:

$$\vec{p}(s) = s\vec{AP} + \vec{a}$$

Por una parte,

$$
\begin{aligned}
\vec{AP} &= \vec{AB} + \vec{BP} \\
&= -\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{c}) \\
&= -\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})
\end{aligned}
$$

Por lo que la ecuación anterior se escribe

$$\vec{p}(s) = \vec{a} + s(-\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})) \tag{1}$$

De igual manera, podemos ver que $\vec{BQ}$ se puede escribir como

$$\vec{q}(t) = \vec{b} + t(-\vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{a})) \tag{2}$$

Usando (1) y (2) tenemos que:

$$\vec{a} + s(-\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})) = \vec{b} + t(-\vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{a}))$$

para que coincidan en el mismo punto, debe observarse que los escalares en $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ sean los mismos para cada representación, lo que desarrollando nos lleva a que $1/2s\vec{c} = 1/2t\vec{c}$, de ahí que $s = t$. Ahora bien, $a - s\vec{a} = 1/2t\vec{a}$, con ello $t = s = 2/3$. Así, el punto G se escribe como:

$$G = \vec{a} + 2/3(-\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})) = 1/3(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$

Esto nos dice que G parte al segmento $\bar{AP}$ y a $\bar{BQ}$ en $2/3$. Al punto G se le conoce como el centro de gravedad o gravicentro, centro de masa o centroide. Lo que la representación

$$G = 1/3(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$

nos dice, es que el punto G en un sistema de vectores $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ tiene una "representación baricéntrica" $(1/3, 1/3, 1/3)$. Discutiremo esto durante los próximos días.