Geometría Analítica I
Lectura 11

Ayudante: Guilmer González   Día 25 de noviembre, 2015

1 Tema: Distancia entre figuras

Dada dos figuras planas, $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$, la distancia entre dos figuras se define como

$$d(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = \min_{\substack{P \in \mathcal{F}_1 \\ Q \in \mathcal{F}_2}} d(P, Q)$$

$\mathcal{F}_{1,2}$ pueden ser puntos, un segmento, una región poligonal cerrada o abierta, una circunferencia, etc.

1.1 Distancia entre un punto y una circunferencia

Considere el lugar geométricos de los puntos $P \in \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{L} = \{P\, d(P, \mathcal{C}(\theta, R)) = d(P, P_1)\}$$

aquí, $\theta = (c_x, c_y)$ es el centro de la circunferencia y R su radio. $\mathcal{L}$ es la colección de puntos que estan a igual distancia de una circunferencia que de un punto P_1 fijo.

El punto P_1 está en el plano, veamos el caso cuando P_1 se encuentra dentro del círculo.

Caso, P_1 dentro del cículo. $d(P, \theta) < R$.

Si observamos la formulación de $\mathcal{L}$, ahí, tenemos dos cuestiones que resolver primeramente. Sea r (adecuada, ahora discutimos), por una parte:

quiénes son los puntos que se encuentran a distancia r del círculo? luego, para r, quienes son los puntos que se encuentran a igual distancia de P_1? La respuesta a la primera opción, se entiende es una circunferencia, que puede estar al interior de $\mathcal{C}(\theta, R)$ o fuera (solo para r pequeña hay dos); para la segunda cuestión, tenemos que una circunferencia son los puntos que están a distancia r de P_1 (una circunferencia con centro en P_1 y radio r). Bajo estas observaciones, podemos definir un procedimiento para identificar los puntos que representa $\mathcal{L}$:

a) Tome r suficientemente grande, los puntos que están a distancia r de $\mathcal{C}(\theta, R)$ son dos circunferencias.

b) Los puntos que están a distancia r de P_1 es una circunferencia.

c) Los puntos que están a distancia r tanto de una circunferencia como de un punto fijo, es la intersección de las circunferencias anteriores.

Observe que la circunferencia externa a $\mathcal{C}(\theta, R)$ no nos interesa, no tiene intersección con $\mathcal{C}(P_1, r)$. Existe un valor a partir del cual nuestro procedimiento es válido:

$$r_{\min} = \frac{1}{2} d(P_1, \mathcal{C}(\theta, R))$$

Muestre por que. Muestre que hay un valor límite para r que puede ser considerado, diga quien es ese valor.

Como se muestra en la figura de abajo, este procedimiento nos genera una colección de puntos que aparentan ser una elipse

Se cree que es una elipse, y que sus focos son P_1 y θ, veamos. Por una parte, es fácil comprobar que dado que P_1 está dentro del círculo,

$$d(P, \mathcal{C}(\theta, R) = R - d(P, \theta)$$

por consiguiente,

$$R - d(P, \theta) = d(P, P_1),$$

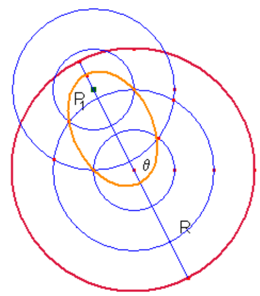

Figura 1: Distancia de un punto a una circunferencia, en punto está adentro del círculo.

es decir:

$$d(P, P_1) + d(P, \theta) = R$$

nuestro lugar geométrico es una elipse, P_1 y θ son los focos. Bajo esto, hemos llegado a un primer resultado:

Resultado Si P_1 está dentro de la circunferencia $\mathcal{C}(\theta, R)$ (lo que se escribe como $d(P, \theta) < R$, entonces

$$\mathcal{L} = \{P \, d(P, \mathcal{C}(\theta, R)) = d(P, P_1)\}$$

es una elipse.

Caso 2: Ahora, consideremos a P_1 fuera de la cirucnferencia $\mathcal{C}(\theta, R)$. En este caso, observe que $d(P_1, \theta) > R$.

El procedimiento descrito anteriormente, funciona de igual manera aquí, describamoslo en términos de conjunto de puntos

Procedimiento

1. Consideremos un $r > 0$ suficientemente grande, para el, identifiquemos la colección de puntos P que estan a distancia r de la circunferencia

como:

$$\mathcal{L}_1 = \{P|\, d(P, \mathcal{C}(\theta, R)) = r\}$$

2. Consideremos para esa misma r, la colección de puntos que se encuentran a distancia r de P_1, esto es

$$\mathcal{L}_2 = \{P|\, d(P, P_1) = r\}$$

3. Luego, si $P \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$, tenemos $P \in \mathcal{L}$, es decir, la intersección de esos conjuntos es un punto del lugar geométrico buscado.

En la figura de abajo, se puede observar la forma que tienen esos puntos. Como comentario adicional, hay un valor para r a partir el procedimiento anterior es válido (es decir $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \neq$), este es

$$r_{\min} = \frac{1}{2} d(P_1, \mathcal{C}(\theta, R))$$

justifique esto.

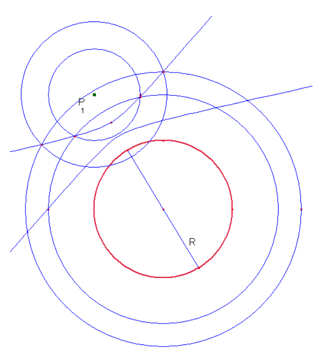

Figura 2: Distancia de un punto a una circunferencia, en punto está fuera del círculo.

Ahora bien, si P_1 está fuera del círculo, la distancia

$$d(P_1, \mathcal{C}(\theta, R)) = d(P, \theta) - R$$

de esto, se sigue que los puntos del lugar geométrico satisfacen que

$$d(P_1, \mathcal{C}(\theta, R)) = d(P, \theta) - R = d(P, P_1)$$

y con esto, tenemos que la ecuación para el lugar geométrico (las figuras son planas) es

$$d(P, \theta) - d(P, P_1) = R$$

Bajo esto, hemos llegado a un segundo resultado:

Resultado Si P_1 está fuera de la circunferencia $\mathcal{C}(\theta, R)$ (lo que se escribe como $d(P, \theta) > R$, entonces

$$\mathcal{L} = \{P \, d(P, \mathcal{C}(\theta, R)) = d(P, P_1)\}$$

es una hipérbola.