

Geometría Analítica I

LECTURA 1

Ayudante: Guilmer González

Día 1 de septiembre, 2015

El día de hoy veremos:

0. Sobre el tema de vectores. Comentarios.
1. La ley del triángulo.
2. Algunos ejercicios.

1 La ley del triángulo

Por tres puntos en el plano, podemos contruir un triángulo. Por tres puntos en el plano podemos contruir dos vectores. Tomemos los puntos A , B y C construyamos los vectores \vec{u} y \vec{v} que parten de A hacia B y C respectivamente, tracemos el paralelogramo para formar el vector \vec{w} suma de los dos anteriores $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. Quién es el vector $\vec{z} = \vec{u} - \vec{v}$?

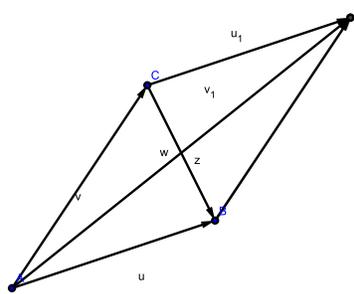


Figura 1: Suma y diferencia de vectores.

Preguntar a alguien en el salón y hacerlo

Ahora observe el triángulo $\triangle ABC$ formado por esos puntos, y los vectores \vec{AB} , \vec{BC} y \vec{CA} , observe que se cumple:

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$$

es decir, el triángulo se cierra.

Esta propiedad será elemental para muchos ejercicios que usaremos. Por ejemplo, si tres vectores ocurren que su suma es cero, entonces forman un triángulo. Esta es lo que se conoce como la ley del triángulo.

2 Algunos ejercicios

Ejercicio 1: Demuestre que con las medianas de cualquier triángulo se puede construir otro.

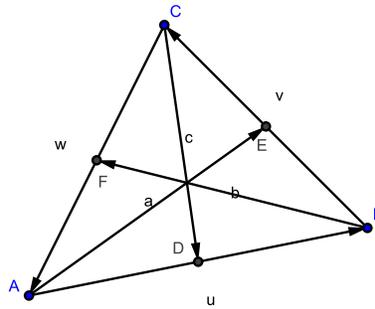


Figura 2: Un triángulo y sus medianas.

Consideremos el vector \vec{a} que parte de A hacia el punto medio de su lado opuesto D , el vector \vec{b} que parte de B hacia E y el vector \vec{c} que parte de C a F . Se forman tres vectores, si con ellos debemos formar un triángulo, atendiendo a la ley del triángulo, debemos mostrar que su suma es cero.

Debido a la notación que hemos usado, tenemos que

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

Observe que

$$\vec{a} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$$

y de manera análoga, tenemos que

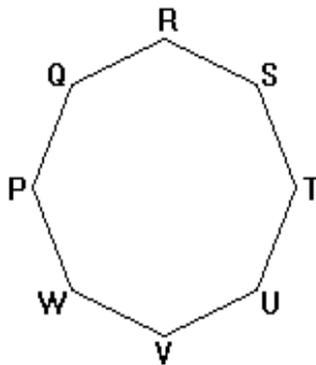
$$\begin{aligned}\vec{b} &= \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w} \\ \vec{c} &= \vec{w} + \frac{1}{2}\vec{u}\end{aligned}$$

haciendo la suma,

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} &= \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

pues $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, son vectores del triángulo ABC . Luego, las medianas forman un triángulo.

Ejercicio 2: Consideremos un octágono



Encuentre el vector

$$\vec{PQ} + \vec{QR} + \vec{RS} + \vec{ST} + \vec{TU} + \vec{UV} + \vec{VW} + \vec{WP}$$

Lo anterior se conoce como regla del ciclo, ya que en general, podemos considerar una colección de puntos en el plano que formen o bien un polígono convexo o cruzado y poder en ambos casos observar esta propiedad (si la region poligonal no se cierra, la suma es el vector que une el último punto con el primero).

Encuentre de manera gráfica (por dibujo) y analítica el vector

$$\vec{H} = \vec{PQ} + \vec{PR} + \vec{PS} + \vec{PT} + \vec{PU} + \vec{PV} + \vec{PW}$$

La ley del triángulo la podemos generalizar para cualquier polígono (no cruzado) y en cualquier caso la suma de los vectores cuando partimos de un punto y volvemos al mismo es cero

$$P_1\vec{P}_2 + P_2\vec{P}_3 + \dots + P_n\vec{P}_1 = \vec{0}$$

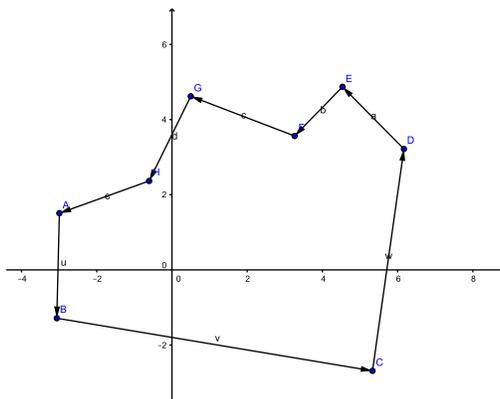
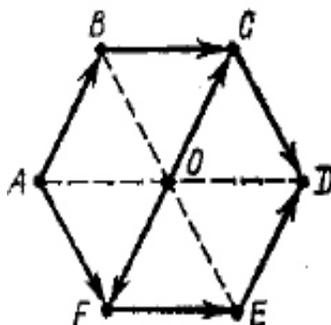


Figura 3: La ley del ciclo.

Ejercicio 3: Considere un hexágono como en la figura



hallar la suma de los vectores

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OF}.$$

Observe que se le ha asignado una dirección a los vectores en la figura. Si esto no es así, el resultado puede ser otro.

Como resultado previo, en un hexágono regular, las diagonales cruzan en O y parten a la diagonal en dos, por lo que se observa que $\vec{OA} = -\vec{OD}$, por nombrar una diagonal. **Dicuir este punto que será esencial.**

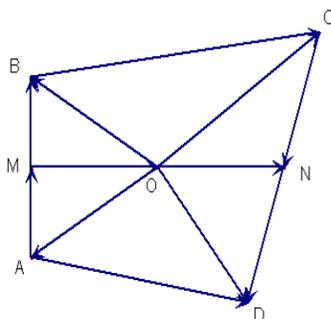
De manera análoga, observaremos que $\vec{OC} = -\vec{OF}$ y $\vec{OB} = -\vec{OE}$. Con esto, se observa que $\vec{OA} + \vec{OD} = \vec{0}$, $\vec{OC} + \vec{OF} = \vec{0}$, $\vec{OB} + \vec{OE} = \vec{0}$, y entonces se observa el resultado.

Observe que en el hexágono regular se cumple

$$\vec{AD} + \vec{EB} + \vec{CF} = \vec{0}$$

Ejercicio 4: Considere un cuadrilátero $ABCD$ en el espacio o en el plano, sea M el punto medio del segmento \vec{AB} , N el punto medio del segmento \vec{CD} . Sea O el punto medio del segmento \vec{MN} . Demuestre que:

- $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$
- $\vec{MN} + \vec{NM} = \vec{BC} + \vec{AD}$



Hacer este ejercicio en la pizarra

Ejercicio 5: Muestre que en cualquier cuadrilátero, si se unen los puntos medios de los segmentos adyacentes, se forma un paralelogramo.

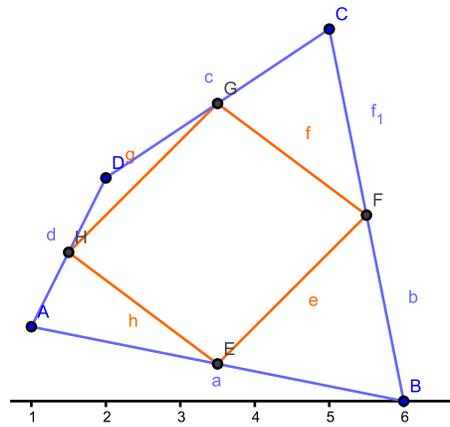


Figura 4: Un paralelogramo a partir de cualquier cuadrilátero.

Lo interesante de éste ejercicio, es que no importa si el cuadrilátero es no convexo, por igual se forma un paralelogramo.