Eduardo Melo Gómez | Geo. Ana II

① Sugiera dos rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ en el plano que no sean orto-gonales.

• Calcule la transformación inversa $p = A^{-1}p' - A^{-1}b$

• En el sistema oblicuo calcule la norma del vector $v' = (1,1)$ y calcule el vector v del cual proviene y la norma de este último en el sistema usual $\binom{x}{y}$.

Sean $\mathcal{L}_1: x + 2y + 3 = 0$

$$-x + y + 1 = 0$$

• $x' = x + 2y + 3 = 0$

$y' = -x + y + 1 = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\therefore p' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• sabemos que $p' = Ap + b$,

$\Rightarrow p = A^{-1}p' + (-A^{-1}b)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ -a + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b + 2d = 0 \\ -b + d = 1 \end{cases}$$

$3c = 1$ $\qquad$ $3d = 1$

$c = 1/3$ $\qquad$ $d = 1/3$

$-a + \frac{1}{3} = 0$ $\qquad$ $b + 2\left(\frac{1}{3}\right) = 0$

$a = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $b = -\frac{2}{3}$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow -A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$\text{ent } -A^{-1}b = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore p = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} p' + \begin{pmatrix} -1/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$

• calculemos la norma de $v' = (1,1)$

$\|v'\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

buscamos saber en dónde se encuentra el punto v' dentro del plano común $\binom{x}{y}$

10

como $p' = Ap + b$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x + 2y \\ -x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3 \\ 1 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x + 2y \\ -x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y = -2 & — ① \\ -x + y = 0 & — ② \end{cases}$$

$3y = -2$

$y = -2/3$

$-x - \frac{2}{3} = 0$

$x = -2/3$

$\therefore$ v' se encuentra en el punto $(-2/3, -2/3)$

Intersectemos $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ para encontrar el centro

$x + 2y + 3 = 0$

$-x + y + 1 = 0$

$3y + 4 = 0$

$y = -4/3$

$-x - \frac{4}{3} + 1 = 0$

$-x - \frac{1}{3} = 0$

$x = -1/3$

$\therefore$ el centro del nuevo sistema oblicuo es $(-1/3, -4/3)$.

$v = (-1/3, -4/3) - (-2/3, -2/3)$

$v = (1/3, -2/3)$

$u = (1/3, -2/3)$

$\Rightarrow \|u\| = \sqrt{(1/3)^2 + (-2/3)^2}$

$\|u\| = \sqrt{\frac{5}{9}}$

$\therefore$ la proporción cambió, lo que nos confirma que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ no son ortogonales

- Diga de qué recta proviene $x + 4y - 1 = 0$

tenemos que $x' = x + 2y + 3$
$y' = -x + y + 1$

sustituimos x' y y' en la recta $x' + 4y' - 1 = 0$

$\Rightarrow (x + 2y + 3) + 4(-x + y + 1) - 1 = 0$

$\Rightarrow x + 2y + 3 - 4x + 4y + 4 - 1 = 0$

$\Rightarrow -3x + 6y + 6 = 0$

ok

Eduardo Melo Gómez

Geo. Ana II

② Sugiera dos rectas $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ ortogonales.
- Calcule la transformación ortogonal $p' = T(p) = Qp + b$
- Calcule la transformación inversa $p = Q^{-1}p' - Q^{-1}b$
- En el sistema ortogonal elegido calcule la norma del vector $v' = (1,1)$ y calcule el vector v del cual proviene y la norma de este último en el sistema usual.

Sean $\mathcal{L}_1: x + 2y + 2 = 0$
$\mathcal{L}_2: -2x + y + 5 = 0$

- $x' = x + 2y + 2 = 0$
$y' = -2x + y + 5 = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ahora, dividimos entre la norma
$\|(1, 2)\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{-2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix}}_{Q \text{ es ortogonal}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{5}{\sqrt5} \end{pmatrix}}_{b}$$

transformación ortogonal

$$\therefore p' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{-2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{5}{\sqrt5} \end{pmatrix}$$

- Sabemos que $Q^{-1} = Q^t$ pues Q es ortogonal

$$\Rightarrow Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix} \Rightarrow -Q^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \\ -\frac{2}{\sqrt5} & -\frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix}$$

$$y\ -Q^{-1}b = 2/\sqrt5\begin{pmatrix} -1/\sqrt5 \\ -2/\sqrt5 \end{pmatrix} + 5/\sqrt5\begin{pmatrix} 2/\sqrt5 \\ -1/\sqrt5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2/5 \\ -4/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/5 \\ -9/5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore p = \begin{pmatrix} 1/\sqrt5 & -2/\sqrt5 \\ 2/\sqrt5 & 1/\sqrt5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8/5 \\ -9/5 \end{pmatrix}$$

transformación inversa

- calculemos la norma de $v' = (1,1)$
$\|v'\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt2$

buscamos saber en dónde se encuentra v' dentro del plano común $\binom{x}{y}$

como $p' = Qp + b$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt5 & 2/\sqrt5 \\ -2/\sqrt5 & 1/\sqrt5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/\sqrt5 \\ 5/\sqrt5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1/\sqrt5 x + 2/\sqrt5 y \\ -2/\sqrt5 x + 1/\sqrt5 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt5 - 2/\sqrt5 \\ \sqrt5 - 5/\sqrt5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1/\sqrt5 x + 2/\sqrt5 y = (\sqrt5 - 2)/\sqrt5 & -① \\ -2/\sqrt5 x + 1/\sqrt5 y = (\sqrt5 - 5)/\sqrt5 & -② \end{cases}$$

multipliquemos a ② $\times(-2)$

$$4/\sqrt5 x - 2\sqrt5\, y = \frac{-2(\sqrt5) + 10}{\sqrt5} \quad -②$$
$$1/\sqrt5 x + 2\sqrt5\, y = \frac{\sqrt5 - 2}{\sqrt5} \quad -①$$

$$\frac{5}{\sqrt5}x = \frac{-\sqrt5 + 8}{\sqrt5}$$

$$x = \frac{8 - \sqrt5}{5} = 1.1527$$

sustituyendo x en ①

$$\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{8 - \sqrt5}{5}\right) + \frac{2}{\sqrt5}y = \frac{\sqrt5 - 2}{\sqrt5}$$

$$\Rightarrow \frac{8 - \sqrt5}{5\sqrt5} + \frac{2}{\sqrt5}y = \frac{\sqrt5 - 2}{\sqrt5}$$

$$\Rightarrow \frac{8\sqrt5 - 5 + 10\sqrt5 y}{25} = \frac{\sqrt5 - 2}{\sqrt5}$$

$$\Rightarrow 40 - 5\sqrt5 + 50y = 25\sqrt5 - 50$$

$$y = \frac{25\sqrt5 - 50 - 40 + 5\sqrt5}{50}$$

$$y = \frac{30\sqrt5 - 90}{50} = 0.4583$$

$\therefore$ v' se encuentra en el punto
$$\left(\frac{8 - \sqrt5}{5}, \frac{-90 + 30\sqrt5}{50}\right)$$

Norma

Intersectemos $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ para encontrar el centro para calcular u' dentro de $\binom{x}{y}$

$$\begin{cases} x+2y+2=0 & -(1) \\ -2x+y+5=0 & -(2) \end{cases} \Big) 2$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \cancel{2x}+4y+4=0 \\ -\cancel{2x}+y+5=0 \\ \hline 5y+9=0 \end{array}$$

$$y=\frac{-9}{5}$$

sustituyendo y en (2)

$$-2x-\frac{9}{5}+5=0$$

$$-2x\;\frac{-9+25}{5}=0$$

$$x=\frac{-16}{5}\Big/\frac{-2}{1}=\frac{8}{5}$$

$\therefore$ el centro del nuevo sistema ortog. es $\left(\frac{8}{5},\frac{-9}{5}\right)$

$$\therefore\; u=\left(\frac{8}{5},\frac{-9}{5}\right)-\left(\frac{8-\sqrt{5}}{5},\frac{-90+30\sqrt{5}}{50}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{-30\sqrt{5}}{50}\right)$$

$$\Rightarrow \|u\|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2+\left(-\frac{30\sqrt{5}}{50}\right)^2}=\sqrt{2}$$

$\therefore$ la proporción no cambia, lo que nos confirma que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son ortogonales.

- Diga de qué recta proviene $x'+4y'-1=0$

tenemos que: $x'=x+2y+2$
$y'=-2x+y+5$

sustituimos x' y y' en la recta $x'+4y'-1=0$

$$\Rightarrow x+2y+2+4(-2x+y+5)-1=0$$

$$\Leftrightarrow x+2y+2-8x+4y+20-1=0$$

$$\Leftrightarrow -7x+6y+21=0$$

muy bien!