06/02/2015

Tarea:

Geometría analítica II

Profesores: · Pablo Barrera.
· Gilmer González.

Alumno: Pablo César Palomino Martínez.

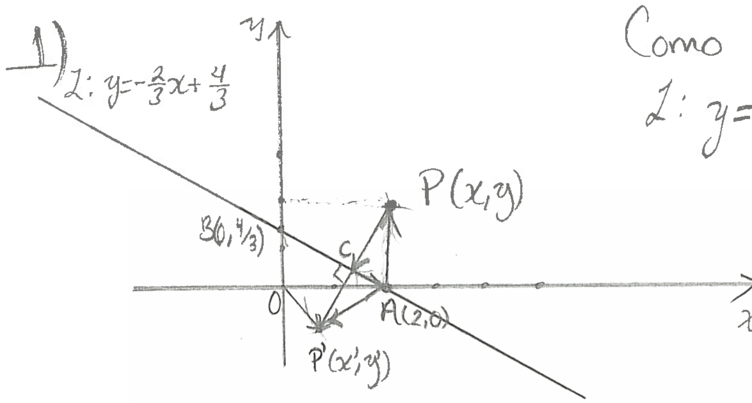
UNAM.

Sea $\mathcal{L}$: $2x+3y-4=0$.

1) Determinar la transformación que se obtiene al reflejar $P=\binom{x}{y}$ sobre $\mathcal{L}$.

2) Calcular la distancia de $P_0=\binom{5}{10}$.

1)



Como $\mathcal{L}$: $2x+3y-4=0$,
$\mathcal{L}$: $y=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$.

Sea $\vec{u}$ un vector sobre $\mathcal{L}$.
Sea $A\in\mathcal{L}$. Entonces la parametrización de $\mathcal{L}$ es de la forma:

$\mathcal{L}$: $C(t)=\vec{OA}+t\vec{u}$.

Debemos hallar el vector $\vec{OP'}$ para encontrar las coordenadas de P', donde P' es el reflejo de P respecto de $\mathcal{L}$.

Pero $\vec{OP'}=\vec{OA}+\vec{AP'}$, por lo que, en primer lugar, hay que encontrar a $\vec{AP'}$.

Tenemos que $\vec{AP'}=\vec{AP}+\vec{PP'}$ y $\vec{PP'}=\vec{PC}+\vec{CP'}$, donde C es la intersección de $\mathcal{L}$ y el segmento $\overline{PP'}$.

Como P' es el reflejo de P, por hipótesis, el segmento PP' es perpendicular a L y $|PC| = |CP'|$. Recordemos que $\overrightarrow{PC}$ y $\overrightarrow{CP'}$ tienen la misma dirección.

Entonces:

$$\overrightarrow{AP'} = \overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{PC}.$$

Luego, hay que calcular a $\overrightarrow{PC}$.

Sabemos que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PC}$, por lo que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP} \\ &= (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) - \overrightarrow{AP} \end{aligned}$$

En particular, $C \in L$ y por su parametrización $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u}$.

Por tanto,
$$\begin{aligned} \overrightarrow{PC} &= (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) - \overrightarrow{AP} \\ &= ((\overrightarrow{OA} + t\vec{u}) - \overrightarrow{OA}) - \overrightarrow{AP} \\ &= t\vec{u} - \overrightarrow{AP}. \end{aligned}$$

Por hipótesis, $\overrightarrow{PC}$ es perpendicular a $\vec{u}$, entonces

$$0 = (\overrightarrow{PC}) \cdot \vec{u} = (t\vec{u} - \overrightarrow{AP})\vec{u} = t\vec{u}\vec{u} - \overrightarrow{AP}\vec{u}$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{\overrightarrow{AP}\vec{u}}{\vec{u}\vec{u}} \quad (1)$$

De donde

$$\overrightarrow{PC} = t\vec{u} - \overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AP}\vec{u}}{\vec{u}\vec{u}}\vec{u} - \overrightarrow{AP}$$

y $\overrightarrow{AP'} = \overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AP} + 2(t\vec{u} - \overrightarrow{AP})$,

es decir,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP'} &= \overrightarrow{AP} + 2t\vec{u} - 2\overrightarrow{AP} \\ &= 2t\vec{u} - \overrightarrow{AP} \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP'} = \overrightarrow{OA} + (2t\vec{u} - \overrightarrow{AP})$$

y por (1):

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OA} + 2\left(\frac{\overrightarrow{AP}\,\vec{u}}{\vec{u}\,\vec{u}}\right)\vec{u} - \overrightarrow{AP}.$$

Si A y P tienen coordenadas (a,b) y (x,y) respectivamente, obtenemos:

$$\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + 2\left(\frac{\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u} - \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

$$= 2\left(\frac{\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= 2\left(\frac{\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= 2\left(\frac{\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix}$$

$$= 2\left(\frac{\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u} + \begin{pmatrix} 2a-x \\ 2b-y \end{pmatrix}$$

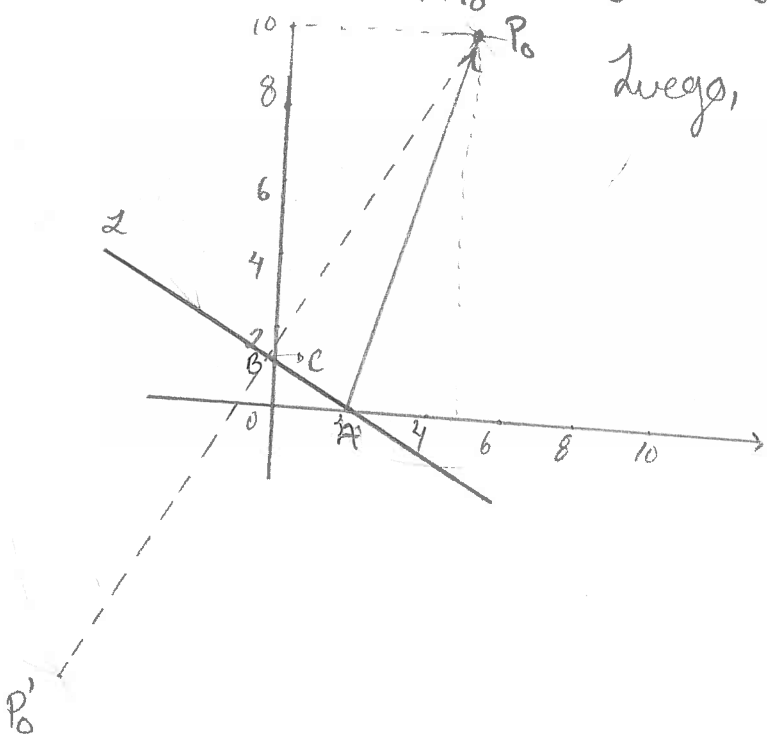
y esta es la transformación que estábamos buscando.

2) Sea $P_0(5,10)$. Nos piden encontrar la distancia de P_0 a $\mathcal{L}$. En el inciso anterior vimos que $\overrightarrow{PC} = \left(\dfrac{\overrightarrow{AP}\,\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u} - \overrightarrow{AP}$, donde $A \in \mathcal{L}$, $\vec{u}$ es un vector sobre $\mathcal{L}$, P un punto cualquiera del plano y C el pie de la distancia de P a $\mathcal{L}$.

Entonces sean $A \in \mathcal{L}$ y $B \in \mathcal{L}$, cuyas coordenadas sean $A(2,0)$ y $B(0, 4/3)$.

Tomemos $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, es decir, $\vec{u} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4/3 \end{pmatrix}$.

Además, $\overrightarrow{AP_0} = \overrightarrow{OP_0} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$



Luego, $\overrightarrow{P_0C} = \left(\dfrac{\overrightarrow{AP_0}\,\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u} - \overrightarrow{AP_0}$

$$= \left[\frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 4/3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -2 \\ 4/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 4/3 \end{pmatrix}}\right]\begin{pmatrix} -2 \\ 4/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$= \left[\frac{-6 + 40/3}{4 + 16/9}\right]\begin{pmatrix} -2 \\ 4/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$= \left[\frac{\frac{22}{3}}{\frac{52}{9}}\right]\begin{pmatrix} -2 \\ 4/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{198}{156}\right)\begin{pmatrix} -2 \\ 4/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{33}{26}\right)\begin{pmatrix} -2 \\ 4/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{66}{26} \\ \frac{132}{78} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{66}{26} - \frac{78}{26} \\ \frac{132}{78} - \frac{780}{78} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{144}{26} \\ -\frac{648}{78} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{72}{13} \\ -\frac{108}{13} \end{pmatrix}$$

Entonces $\overrightarrow{P_0C} = \begin{pmatrix} -\frac{72}{13} \\ -\frac{108}{13} \end{pmatrix}$.

Luego, $\|\overrightarrow{P_0C}\| = \sqrt{\left(-\frac{72}{13}\right)^2 + \left(-\frac{108}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{5184}{169} + \frac{11664}{169}} = \sqrt{\frac{16848}{169}}$

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{P_0C}\| = \sqrt{\frac{1296}{13}} = \frac{36}{\sqrt{13}} \approx 9.9846$$

$\therefore$ La distancia de P_0 a L es 9.9846.

Para encontrar el reflejo P_0', habíamos visto en el inciso anterior:

$$\overrightarrow{OP'} = 2\left[\frac{\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\right]\vec{u} + \begin{pmatrix} 2a-x \\ 2b-y \end{pmatrix},$$

si hacemos $P' = P_0'$, $P_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4/3 \end{pmatrix}$

entonces:

$$\overrightarrow{OP_0'} = 2\left[\frac{\begin{pmatrix} 5-2 \\ 10-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 4/3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -2 \\ 4/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 4/3 \end{pmatrix}}\right]\begin{pmatrix} -2 \\ 4/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2(2)-5 \\ 2(0)-10 \end{pmatrix}$$

$$= 2\left[\frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 4/3 \end{pmatrix}}{\left(\frac{52}{9}\right)}\right]\begin{pmatrix} -2 \\ 4/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$= 2\left[\frac{-6 + 40/3}{(52/9)}\right]\begin{pmatrix} -2 \\ 4/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$= 2\left[\frac{66/9}{52/9}\right]\begin{pmatrix} -2 \\ 4/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \end{pmatrix} = 2\left[\frac{33}{26}\right]\begin{pmatrix} -2 \\ 4/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{33}{13}\begin{pmatrix} -2 \\ 4/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{66}{13} \\ \frac{132}{39} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{66}{13} - \frac{13}{13} \\ \frac{132}{39} - \frac{390}{39} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{79}{13} \\ -\frac{258}{39} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -6.0769 \\ -6.6153 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$\therefore$ Las coordenadas del reflejo de P_0 son:

$P_0'(-6.0769, -6.6153)$.