EJERCICIOS DE GEOMETRÍA ANALITICA DEL ESPACIO

1. Determinar la posición relativa de las siguientes parejas de planos:

a) $\pi: 2x+3y-z+8=0 \qquad \pi': -4x-6y+2z-16=0$

b) $\pi: 3x+2y-6z-7=0 \qquad \pi': 4x-y+z+2=0$

c) $\pi: 3x-y+z=-1 \qquad \pi': 6x-2y+2z=7$

d) $\pi: 3x-y+5z+1=0 \qquad \pi': 4x+y+7z+12=0$

---

2. Dado el plano $\pi: 3x-5y+z-2=0$, determinar la ecuación de un plano π', paralelo a π que contenga al punto A(-3, 2, 4).

3. Determinar la posición relativa de los planos:

$$\pi: \begin{cases} x = 5-3t+2s \\ y = 6+2t-s \\ z = 7-t+5s \end{cases} \qquad \pi': \begin{cases} x = 2+7\mu \\ y = 6+\lambda-3\mu \\ z = -5+13\lambda+24\mu \end{cases}$$

4. Determinar la posición relativa de los planos:

$$\alpha: x+y-z+2=0$$
$$\beta: 2x-y+3z+5=0$$
$$\gamma: 3x+2z+7=0$$

---

5. Discutir, según los valores de m, la posición relativa de los planos:

$$\pi: x+y+z=m+1$$
$$\pi': x+my+z=1$$
$$\pi'': mx+y+(m-1)z=m$$

---

6. Determinar la posición relativa de los planos α, β, γ, de acuerdo con los valores de los parámetros a y b.

$$\alpha: 3x-y+2z=1$$
$$\beta: x+4y+z=b$$
$$\gamma: 2x-5y+az=-2$$

---

7. Demostrar que los planos α, β, γ se cortan en un punto. Determinar las coordenadas de dicho punto:

$$\alpha: 2y - z = 7$$
$$\beta: 3x - 2z = 9$$
$$\gamma: y + z = 6$$

---

8. Determinar la ecuación del plano π, que pertenece al haz de planos de arista r y que pasa por el punto P(6, 7, 0).

$$r: \begin{cases} 3x - y + z + 1 = 0 \\ x + 3y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

9. Dada la recta r, determinar la ecuación del haz de planos de arista r:

$$r: \begin{cases} x = -3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

---

10. Determinar la posición relativa de la recta r y el plano π:

$$r: \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$
$$\pi: 4x + y - z = 3$$

11. Determinar la posición relativa de la recta r y el plano π:

$$r: \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$$
$$\pi: x - y + 3z = 5$$

---

12. Determinar la posición relativa de las r y r' con respecto al plano π:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z+3}{2} \qquad r': \frac{x-7}{6} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{5} \qquad \pi: x + 2y + 4z - 13 = 0$$

13. Determinar el parámetro m para que la recta r sea paralela al plano π:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-3}{2} \qquad \pi: 4x + my + z - 2 = 0$$

14. Determinar el valor de a para que las rectas r y r' sean paralelas en sentido estricto (es decir, no coincidentes):

$$r: \frac{x-a}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{2} \qquad r': \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{2}$$

15. Determinar el valor de a para que las rectas r y r' sean secantes:

$$r: \frac{x-2}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z+1}{2} \qquad r': \frac{x-a}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{3}$$

---

16. Dada la recta r, determinar una recta r', paralela a r, que contenga al punto P(-1, 2, -6)

17. Demostrar que las rectas r y r' son paralelas en sentido estricto:

$$r: \begin{cases} y = -2x+1 \\ z = -3x+6 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} y = -2x-2 \\ z = -3x-8 \end{cases}$$

18. Dados los puntos del plano afín IR^3, A(1, 1, 1), B(2, 1, 0), C(8, 1, 1) y D(3. 1, 2).

a) Comprobar si dicha cuaterna de puntos forma un paralelogramo.
b) **Determinar las ecuaciones de las rectas que se forman tomando dos a dos dichos puntos.**.

19. Dados los puntos A(1, 3,2), B(2, 5, 1) y C(3, 0, -4), determinar la ecuación de la recta determinada por el punto C y que es paralela a la recta definida por los puntos A y B.

20. Determinar el valor de a y b para que los puntos A(-1, 3, 2), B(2, -1, -1) y C(a-2, 7, b) estén alineados.

21. Dados los puntos A(2, 6, -3) y B(3, 3, -2), determinar aquellos puntos de la recta AB que tengan al menos una coordenada nula.

22. Dados los puntos A(4, -1, 3), B(2, 5, 8) y C(5, -1, 6), determinar las ecuaciones de las medianas del triángulo ABC.

---

23. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A(0, 1, 0) y es paralelo a las rectas r y s:

$$r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+1}{2} \qquad s: \frac{x+4}{0} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$$

24. Determinar el valor de a para que los puntos A(0, 0, 1), B(0, 1, 2), C(-2, 1, 3) y D(a, a-1, 2) sean coplanarios.

25. Determinar la ecuación del plano que contiene al punto A(0, 1, 0) y a la recta

$$r: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}$$

26. Hallar la ecuación del plano que contiene al punto A(3, 3, 3) y a la recta $r:\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$

27. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos A(1, 2, 2) y B(0, 2, -1) y es paralelo a la recta $r:\begin{cases} 2x-y-2z=0 \\ 2x+y-z=4 \end{cases}$

---

28. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta r:x-2=y-3=z y es paralelo a la recta $s:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-2}{4}$

---

29. Dado el plano $\pi:\begin{cases} x=5+3t-2s \\ y=-2+4t-5s \\ z=6-t+s \end{cases}$
    a) Determinar dos puntos de dicho plano.
    b) Determinar las ecuaciones de dos rectas secantes contenidas en dicho plano
    c) Determinar la ecuación general del plano.

---

30. Sean los planos $\pi:3x-y+5z-11=0$, $\pi':4x+y+7z+12=0$.
    a) Determinar la ecuación continua de la recta r determinada por dichos planos.
    b) Determinar la ecuación del plano paralelo a π y que pasa por el punto A(-4, 3, 2).

31. Determinar el valor del parámetro m para que los planos α,β y γ se intercepten en una recta:

$$\alpha: mx+y-z=0$$
$$\beta: x+3y+z=0$$
$$\gamma: 3x+10x+4z=0$$

---

32. Sean los planos α,β.
    a) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta r, intersección de dichos planos.
    b) Hallar la ecuación del haz de planos de arista r.

$$\alpha: 4x-3y+7z+8=0$$
$$\beta: -x-y+3z-6=0$$

33. ¿Pertenece el plano p: x+y+z+2=0, al haz de planos de arista r?

$$r:\begin{cases} x+2y-z-1=0 \\ x-3y+4z+2=0 \end{cases}$$

34. Demostrar que si el vector $\vec{w}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, también lo es a cualquier combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

.

---

35. En IR^3, determinar el valor de a, para que los vectores $\vec{u}=(2,a,-3)$ y $\vec{v}=(1,-2,a)$ sean ortogonales.

---

36. Dados los vectores de IR^3 $\vec{u}=(3,-1,1)$, $\vec{v}=(2,0,-3)$ y $\vec{w}=(2,-1,2)$, hallar la proyección de $\vec{u}+\vec{v}$ sobre la dirección de $\vec{w}$.

---

37. Dados los vectores de IR^3 $\vec{u}=(3,-2,3)$, $\vec{v}=(-2,3,0)$ y $\vec{w}=(0,3,-2)$, calcular:

38. Dados los vectores de IR^3 $\vec{u}=(3,-2,5)$, $\vec{v}=(1,0,1)$, calcular $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $|\vec{u}+\vec{v}|$ y comprobar que $|\vec{u}+\vec{v}|\le|\vec{u}|+|\vec{v}|$

---

39. Determinar el ángulo de los vectores $\vec{a}=(8,-4,3)$ y $\vec{b}=(-8,5,-3)$.

40. Determinar el ángulo que forman las rectas $r:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+5}{1}=\dfrac{z-4}{3}$ y $r':\dfrac{x+1}{6}=\dfrac{y+7}{-4}=\dfrac{z}{2}$, averiguando previamente la posición relativa que tienen.

---

41. **Averiguar el ángulo que forman los planos $\pi: 2x+4y-z+8=0$ y $\pi': x+y+6z-6=0$**

42. Encontrar un vector perpendicular al plano que pasa por los puntos A(1, 0, 1), B(2, 1, 3) y C(-1, 2, 4), también llamado vector característico o vector normal al plano.

43. Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano $\pi: x-2y+z+2=0$ y pasa por el punto P(1, 1, -3).

44. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1, 0, 2) y es paralela a los planos $\pi: x-2y+3z+1=0$ y $\pi': 2x-3y+z+6=0$

45. Hallar la ecuación de un plano que pasa por el punto P(1,1,1) y es perpendicular a la recta determinada por los puntos A(2,0,4) y B(8, 1, 6).

46. Determinar las coordenadas del punto A' simétrico del A(2,2,1) respecto al plano $\pi: x-2y+z+6=0$

---

47. Determinar las coordenadas del punto A', simétrico del A(2, 0, 3) respecto a la recta

$$r: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}$$

---

48. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos A(2, 1, 0) y B(0, 1, 3) y es perpendicular al plano $\pi: 2x-y+z-4=0$

---

49. Determinar el ángulo que forman el plano $\pi: 5x+4y-2z+5=0$ y la recta

$$r: \begin{cases} x=2t \\ y=1+3t \\ z=2+4t \end{cases}$$

---

50. Hallar la distancia del punto P(2, 4, 1) al plano $\pi: 3x+4y+12z-7=0$

---

51. Hallar la distancia entre los planos paralelos $\pi: 3x+y+z-3=0$ y $\pi': 3x+y-z-8=0$

---

52. Comprobar que la recta $r: \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-7}{-1}$ es paralela al plano $\pi: x+2y+3z=0$ ya hallar la distancia de la recta al plano.

---

53. Probar que las rectas $r_1: \begin{cases} y=0 \\ x+z=0 \end{cases}$ y $r_2: \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$ se cruzan y hallar la mínima distancia entre ellas.

54. Determinar m para que el vector $\vec{u}(2, m+1, m)$ sea ortogonal al vector normal al plano

$$\pi : \begin{cases} x = 5 + 3t - 2s \\ y = t - s \\ z = -1 - t - 4s \end{cases}$$

---

55. **Dados los puntos A(1, 0, 0), B(0, 1, 0) y C(0, 0, 1):**

a) Demostrar que no están alineados y por lo tanto determinan un triángulo.
b) Determinar las ecuaciones de las alturas del triángulo ABC
c) Determinar las ecuaciones de las mediatrices.
d) Determinar las coordenadas del cincuncentro.
e) Calcular las longitudes de las alturas del triángulo.

.

---

56. Hallar la ecuación del plano que sea perpendicular a la recta $r : \begin{cases} x = 0 \\ y = 2z \end{cases}$ **y diste** $\sqrt{5}$ **unidades del punto P(4, 3, 1).**

57. Demostrar si los puntos A(0, 1, -2), B(1, 0, -5), C(1, 1, -4) y D(2, -1, -8) determinan un cuadrilátero.

58. Determinar los puntos de corte del plano $\pi : 3x - 2y + z = 6$ **con los ejes de coordenadas y calcular el área del triángulo que dichos puntos definen.**

---

59. Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el punto V(1, 1, 1) y los puntos de corte del plano $\pi : 2x + 3y + z - 12 = 0$**, con los ejes de coordenadas.**

60. El plano $\pi : x + y + z = 4$ **es el plano mediador de un segmento, uno de cuyos extremos es el punto A(1, 0, 0). Halla las coordenadas del otro extremo.**