Geometría Analítica II

LECTURA: CÁLCULO DE LA DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS

Guilmer González

Día 7 de marzo, 2015

1 Distancia entre dos rectas

Hasta el momento, hemos aprendido a calcular distancia de un punto a una recta, y de un punto a un plano usando diferentes técnicas. Si contamos en general con dos figuras F_1 y F_2, estamos interesados en calcular la distancia entre ellas, definidas como

$$d(F_1, F_2) = \min_{P \in F_1 \; Q \in F_2} d(P, Q)$$

El caso que nos compete, es el cálculo de la distancia entre dos rectas. Este es un problema muy interesante ya que desde un punto de vista computacional y práctico, es fundamental saber en qué momento dos puntos que siguen una trayectoria estarán lo más cercanos posible. Esos puntos pueden representar barcos moviéndose en cierta dirección o cercanía de naves en distintos planos.

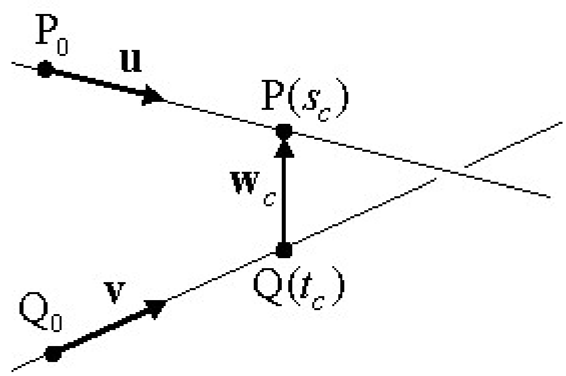
Sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, nuestras rectas de estudio, las cuales representaremos en forma vectorial; sea P_0 un punto de la recta $\mathcal{L}_1$, y Q_0 de la recta $\mathcal{L}_2$. Sea $\vec{u}$, un vector de dirección de la recta $\mathcal{L}_1$ y $\vec{v}$ uno para la recta $\mathcal{L}_2$, con esto tenemos que

$$\begin{aligned} P(s) &= P_0 + s\vec{u}; \quad s \in \mathbb{R} \\ Q(t) &= Q_0 + t\vec{v}; \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$P(s)$ describe la línea $\mathcal{L}_1$ y $Q(t)$ describe la línea $\mathcal{L}_2$. Para cada valor de s tenemos un punto en $\mathcal{L}_1$ y para cada t, tendremos un punto sobre la recta $\mathcal{L}_2$. La idea es identificar en qué par de valores s_c y t_c se acanza el mínimo.

Para cada (s,t), consideremos $\vec{w}(s,t)$, el vector que va de un punto $Q(t)$ de $\mathcal{L}_2$ a un punto $P(s)$ en $\mathcal{L}_1$. La idea primera es encontrar $\vec{w}(s_c,t_c)$ que minimicen la magnitud de $\vec{w}(s,t)$, para cualesquiera s y t.

$$\begin{aligned} d(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2) &= \min_{s,t} |\vec{w}(s,t)| \\ &= |\vec{w}(s_c,t_c)| \end{aligned}$$



Observación:
Como hemos señalado en clase, si las rectas no son paralelas, el segmento $\overline{P(s_c)Q(t_c)}$ une los puntos más cercanos entre las rectas es único, y es perpendicular a las dos rectas; es decir, ningun otro segmento tiene esta propiedad.

Con esta observación, el vector $\vec{w_c}(s_c,t_c)$, es perpendicular tanto al vector de dirección u como a v. Es decir:

$$\vec{u}\cdot\vec{w}_c = 0; \quad \vec{v}\cdot\vec{w}_c = 0$$

un problema que hemos resuelto en reiteradas ocasiones, en éste caso, el producto cruz. De nueva cuenta, resolvamos

Por una parte, tenemos que

$$\vec{w}_c = P(s_c) - Q(t_c) = \vec{w}_0 + s_c\vec{u} - t_c\vec{v}$$

donde $\vec{w}_0 = P_0 - Q_0$. La condición de perpendicularidad en ambas rectas nos conduce a resolver un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}(\vec{u}\cdot\vec{u})s_c - (\vec{u}\cdot\vec{v})t_c &= -\vec{u}\cdot\vec{w}_0\\(\vec{v}\cdot\vec{u})s_c - (\vec{v}\cdot\vec{v})t_c &= -\vec{v}\cdot\vec{w}_0\end{aligned}$$

para simplificar, nombremos $a = \vec{u}\cdot\vec{u}$; $b = \vec{u}\cdot\vec{v}$; $c = \vec{v}\cdot\vec{v}$; $d = \vec{u}\cdot\vec{w}_0$ y $e = \vec{v}\cdot\vec{w}_0$, con esto el sistema anterior lo escribimos como

$$\begin{aligned}as_c - bt_c &= d\\bs_c - ct_c &= e\end{aligned}$$

cuya solución para s_c y t_c es

$$s_c = \frac{be-cd}{ac-b^2} \quad \text{y} \quad t_c = \frac{ae-bd}{ac-b^2}.$$

siempre que el denominador no sea cero.

Observemos el denominador. $ac - b^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta(\vec{u},\vec{v}))^2 = (|\vec{u}||\vec{v}|\text{sen }\theta(\vec{u},\vec{v}))^2 \geq 0$. Es decir, son no negativos. Cuando $ac - b^2 = 0$, se tiene que las dos ecuaciones son dependientes, las dos rectas viven en un mismo plano y son paralelas; por consiguiente, la distancia entre las líneas es constante. Este problema puede ser resuelto de manera separada, fijando un punto P_0 en $\mathcal{L}_1$ y encontrando la distancia de ese punto a la otra recta.

Al haber encontrado s_c y t_c, contamos ya con una expresión simple para calcular la distancia entre dos rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$

$$d(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2) = \|P(s_c) - Q(t_c)| = \|(P_0 - Q_0) + \frac{(be-cd)\vec{u} - (ae-bd)\vec{v}}{ac-b^2}\|$$