Geometría Analítica I

Trabajo 22

Profesor: Pablo Barrera | Día 18 de noviembre, 2014

1 Un procedimiento general para construir una transformación lineal entre triángulos

Un problema de sumo interés en geometría anaítica es transformar un triángulo en otro sobre el plano, pero de una manera econoómica.

La idea es sencilla, se basa en: tres puntos definen un sistema coordenado local sobre el plano, luego, desde el punto de vista geométrico, se trata de una transformación entre sistemas de referencia. No lo hemos mencionado pero podemos observar desde el triángulo todo el plano y de ahí lo que realemente estamos haciendo es cambiar de un sistema de referencia a otro. Lo platicaremos en su momento.

En la clase hemos planteado un problema simple: Transformar el triángulo formado por los puntos $P_1(0,0)$, $P_2(1,0)$ y $P_3(0,1)$ a otro triángulo de coordenadas $P_1'(x_1,y_1)$, $P_2'(x_2,y_2)$ $P_3'(x_3,y_3)$, en ese orden.

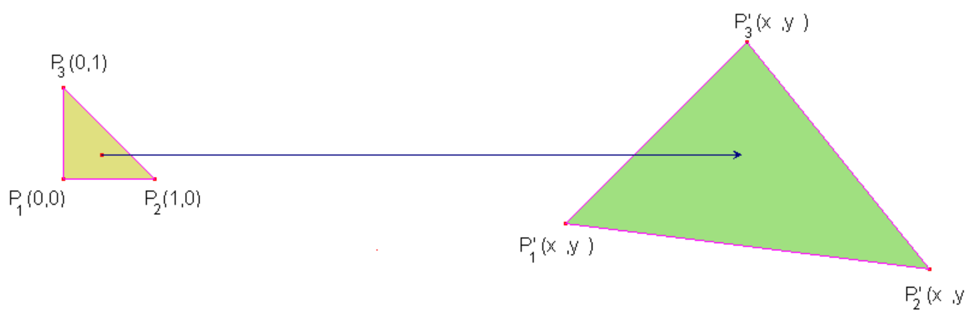

Figura 1: Transformando un triángulo sencillo en otro.

Cualquier otra dependerá del orden de asignación de los puntos. La transformación más simple es una función lineal en x y y. Esto es, si $P'(x',y')$ es un punto en el segundo sistema de referencia, ese se puede escribir como:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 \\ y' &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 \end{aligned} \tag{1}$$

Un punto $P(x,y)$ es transformado a un punto $P'(x',y')$ bajo esa relación.

Como se observa, la correspondencia $P_i' = T(P_i)$ nos da lugar a un sistema de ecuaciones, 6 condiciones, 6 incógnitas (en realidad son menos si agrupamos las correspondientes ecuaciones para x y para y), identifiquemos la tranformación.

Primer punto: $P_1'(x_1', y_1') = T((0,0))$

Bajo esto, la transformación anterior la escribimos como

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \\ y_1' &= \beta_1 \cdot 0 + \beta_2 \cdot 0 + \beta_3 \end{aligned}$$

lo que nos lleva a

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= x_1' \\ \beta_3 &= y_1' \end{aligned} \tag{2}$$

Segundo punto: $P_2'(x_2', y_2') = T((1,0))$

$$\begin{aligned} x_2' &= \alpha_1 1 + \alpha_2 \cdot 0 + x_1' \\ y_2' &= \beta_1 1 + \beta_2 \cdot 0 + y_1' \end{aligned}$$

resolviendo nos lleva

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= x_2' - x_1' \\ \beta_1 &= y_2' - y_1' \end{aligned} \tag{3}$$

Dada la caraterística del tercer punto a mapear, es fácil ver que

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= x_3' - x_1' \\ \beta_2 &= y_3' - y_1' \end{aligned} \tag{4}$$

y con esto ya tenemos los 6 parámetros para definir adecuadamente la transformación lineal (1).

2 Forma matricial

Las matrices juegan un rol muy importante en el manejo compacto de la información y nos permite definir propiedades de las transformaciones a partir de su estructura; esto es, podemos caracterizar el tipo de trasnformación si sabemos que tipo de matriz es la que representa.

Aquí, nos interesa el concepto algebraico de vector como un arreglo o colección de número de la forma

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

o bien

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

donde las entradas a_1, a_2 son los elementos correspondientes del vector $\vec{a}$. Una matriz la vamos a considerar como una colección de vectores, horizontales o verticales

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & | & \vec{a}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vec{r}_1^{\,t} \\ \vec{r}_2^{\,t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definimos el producto interior (o punto) $\cdot$ entre dos vectores de la forma:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Lo interesante de manejar la información de esta manera es que podemos simplicar operaciones. Por ejemplo, el sistema lineal que hemos estado manejando, lo podemos escribir en su forma matricial como:

$$\vec{P'} = \mathbf{A}\vec{P} + b \tag{5}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}; \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

Con lo que se ha descrito, resolvamos el problema anterior determinando la transformación del triángulo $P_1(0,0)$, $P_2(1,0)$ y $P_3(0,1)$ al triángulo $P_1'(1,2,)$, $P_2'(5,3)$ y $P_3'(2,7)$.

$$\vec{P'} = \mathbf{A}\vec{P} + b \tag{6}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}; \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

Apliquemos el primer punto

$$\begin{aligned} \vec{P'}_1 &= \mathbf{A}\vec{P}_1 + \vec{b} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de ahí que

$$\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

esto es, $\vec{b} = \vec{P}_1$.

Para el segundo punto, se tiene que

$$\begin{aligned} \vec{P'}_2 &= \mathbf{A}\vec{P}_2 + \vec{P'}_1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{P}_1 \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + \vec{P'}_1 \end{aligned}$$

Observe que al multiplicar $\mathbf{A}$ por el vector $(1,0)^t$, nos da como resultado la primera columna de $\mathbf{A}$, por consiguiente tenemos que la primera columna de la matriz se escribe como

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \vec{P'}_2 - \vec{P'}_1$$

Ahora calculemos para $\vec{P}_3$:

$$\begin{aligned} \vec{P'}_3 &= \mathbf{A}\vec{P}_3 + \vec{P'}_1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \vec{P}_1 \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \vec{P'}_1 \end{aligned}$$

Observe que al multiplicar $\mathbf{A}$ por el vector $(0,1)^t$, nos da como resultado la segunda columna de $\mathbf{A}$, por consiguiente tenemos que la segunda columna de la matriz se escribe como

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \vec{P'}_3 - \vec{P'}_1$$

Una forma muy compacta de hacer los cálculos. Si terminamos las cuentas, obtendremos que:

$$\begin{aligned} x' &= 4x + y + 1 \\ y' &= x + 5y + 2 \end{aligned}$$

- Ahora nos interesa un problema general: transformar cualquier triángulo $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$ a otro triángulo de coordenadas $P_1'(x_1', y_1')$, $P_2'(x_2', y_2')$ $P_3'(x_3', y_3')$, cómo lo hacemos sin resolver el sistema de 6 por 6?. Antes veamos un problema que nos será útil: calcular la inversa de una matrix.

3 La inversa de una matriz de 2×2

Si se tiene una matriz A de orden $n \times n$, si existe una matriz B tal que

$$AB = I_n = BA$$

diremos que B es la inversa de la matriz A (desde luego, A es la inversa de B).

La inversa de una matriz A es denotada como A^{-1}.

La utilidad de la inversa radica en poder resolver sistemas lineales (en realidad se calcula de otra forma, pero eso se aprende luego, en lineal y numérico). Considere una matriz A de $n \times n$, y su inversa A^{-1}, se desea resolver el sistema

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Multiplicamos la inversa por ambas partes, y aplicamos la propiedad de ser inversa para A:

$$\begin{aligned} A^{-1}A\vec{x} &= A^{-1}\vec{b} \\ \vec{x} &= A^{-1}\vec{b} \end{aligned}$$

ya se ve, que si se cuenta con la inversa se tiene de inmediato la solución al sistema.

La inversa de una matriz tiene propiedades interesantes, por ejemplo:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$

2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

La primera es inmediata y la segunda se verá en clase, es un juego de comprobación.

4 Cómo calcular la inversa de una matriz $A_{2\times 2}$

Veamos cómo calcular la inversa de esta matriz $A_{2\times 2}$

Si la matriz $A_{2\times 2}$ se representa como

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

la inversa de A denotada por A^{-1}, tiene por entradas:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

para lo cual debe ocurrir que $AA^{-1} = I_2$ (la matriz identidad), es decir

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

multiplicando la matriz, temos que

$$\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lo cual representa un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas:

$$\begin{aligned} ax+bz &= 1 && (7) \\ cx+dz &= 0 && (8) \\ ay+bw &= 0 && (9) \\ cy+dw &= 1 && (10) \end{aligned}$$

Este sistema, no es difícil. Si observamos, representa la solución a dos sistemas de ecuaciones, un sistema por cada columna de I_2:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hacer énfasis en esta idea en clase.

Resolvamos simultáneamente este sistema en las dos primeras ecuaciones y luego para las otras dos. A la primera ecuación la multimplicamos por d y a la segunda por b, restamos la segunda de la primera y obtenemos

$$x(ad-bc) = d$$

es decir:

$$x = \frac{d}{ad-bc}$$

Ahora sustituimos este valor en la segunda ecuación, y obtenemos que

$$z = \frac{-c}{ad-bc}$$

Para encontrar z y w, multiplequemos la ecuación (3) por d y la ecuación (4) por b, restemos a la cuarta la tercera obteniendo:

$$y(ad - bc) = -b$$

es decir

$$y = \frac{-b}{ad - bc}$$

lo que nos conduce a

$$w = \frac{a}{ad - bc}$$

Con todo, la inversa de A tiene la forma

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

5 Sobre el cálculo de la transformación inversa

El sistema lineal que hemos estado manejando, lo podemos escribir en su forma matricial como:

$$\vec{P\prime} = \mathbf{A}\vec{P} + b \tag{11}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}; \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

Como se ha visto en sistemas de ecuaciones, el sistema (11) tiene solución, si para $\vec{P}$, si existe una matriz $\mathbf{A}^{-1}$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}\vec{P\prime} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\vec{P} + \mathbf{A}^{-1}b \\ &= \vec{P} + \mathbf{A}^{-1}b \end{aligned}$$

esto es

$$\vec{P} = \mathbf{A}^{-1}\vec{P\prime} - \mathbf{A}^{-1}b \tag{12}$$

y esta es la idea de pasar un sistema de referencia a otro, podemos observar al punto P en términos de P' o bien, P' en términos de P, interpretar los sistemas de referencia.

Los detalles los hicimos en clase, vimos un ejemplo y discutimos la forma o las formas en que podemos expresar la transformación, lo seguiremos discutiendo en los próximos días.

Problema 1: Calcule (en forma matricial) la transformaci´on T_1 del triángulo $\triangle Oe_1e_2$ al triángulo $\triangle P_0P_1P_2$ siendo $P_0(4,1)$, $P_1(7,-2)$ y $P_2(6,4)$.

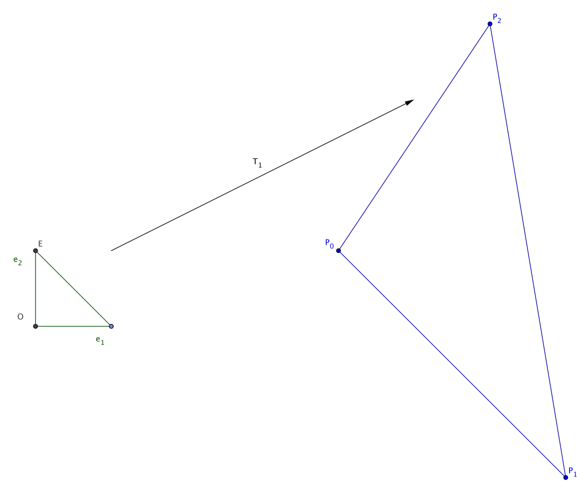

Figura 2: Transformando un triángulo simple en otro.

Problema 2 Calcule la transformación inversa del problema anterior.