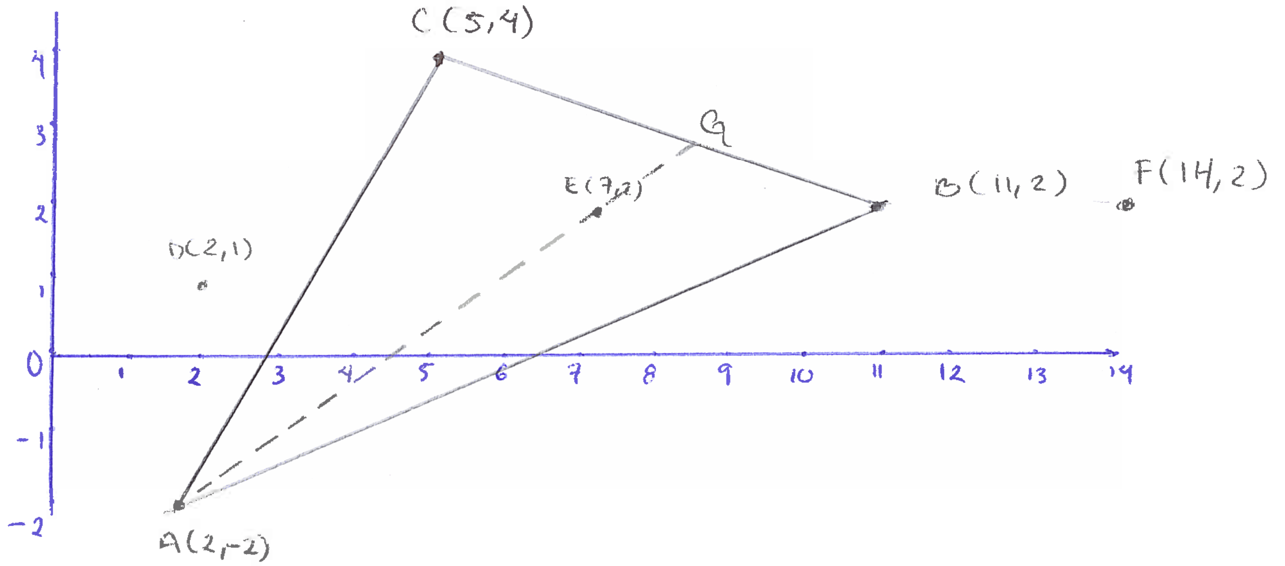
Pablo César Palomino Mtz.
10 de octubre de 2014.
Geometría Analítica.

10/Octubre/2014

Problema: Encuentre las coordenadas baricéntricas de los puntos $D(2,1)$, $E(7,2)$ y $F(14,2)$ con respecto a los puntos $A(2,-2)$, $B(11,2)$ y $C(5,4)$.



La recta que contiene al segmento AE se interseca en G con el segmento CB.

Parametricemos dichas rectas:

$$\mathcal{L}_{AE}: P(\alpha) = A + \alpha(AE)$$
$$= (2,-2) + \alpha(5,4)$$
$$= (2+5\alpha, -2+4\alpha)$$

$$\mathcal{L}_{CB}: Q(\beta) = C + \beta(CB)$$
$$= (5,4) + \beta(6,-2)$$
$$= (5+6\beta, 4-2\beta)$$

Entonces: $Q = P(\alpha) = Q(\beta)$

$$\Rightarrow \quad 2+5\alpha = 5+6\beta \quad (1)$$
$$-2+4\alpha = 4-2\beta \quad (2)$$

Sumando (1) y (2):

$$9\alpha = 9+4\beta$$
$$\alpha = \frac{9+4\beta}{9}$$

Entonces:

$$2+5\left(\frac{9+4\beta}{9}\right) = 5+6\beta$$

$$2+\frac{45+20\beta}{9} = 5+6\beta$$

$$\Rightarrow 45+20\beta = 27+54\beta$$

$$\Rightarrow 34\beta = 18$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{18}{34} = \boxed{\frac{9}{17}}.$$

Por tanto:

$$\alpha = \frac{9+4\left(\frac{9}{17}\right)}{9}$$

$$= \frac{\frac{153+36}{17}}{9} = \frac{189}{153}$$

$$\Rightarrow \alpha = \boxed{\frac{21}{17}}.$$

Por otro lado, $Q(\beta) = C + \beta(CB)$

$$= C + \beta(B-C)$$
$$= (1-\beta)C + \beta B = Q$$

Notemos que $(1-\beta)+\beta = 1$, por lo que le asocieremos las masas $m_C = 1-\beta$ y $m_B = \beta$ a C y a B, respectivamente.

Y por otro lado:

$$q = P(\alpha) = A + \alpha(A_E)$$
$$= (1-\alpha)A + \alpha_E$$
$$\Rightarrow E = \frac{1}{\alpha} q - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) A$$
$$= \frac{1}{\alpha} q + \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) A$$

Notemos que

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha} = 1.$$

Por tanto le asociaremos las masas $m_Q = \frac{1}{\alpha}$ y $m_A = \frac{\alpha-1}{\alpha}$, a Q y a A, respectivamente.

Entonces:

$$m_Q = \frac{17}{21} K \quad m_A = \frac{4}{21} K.$$

Pero sabemos que $m_Q = m_C + m_B = 1$ por tanto $K = \frac{21}{17}$ y así $m_Q = 1$.

Por lo tanto, $m_A = \frac{4}{17}$, $m_B = \frac{9}{17}$, $m_C = \frac{8}{17}$.

Concluimos que las coordenadas baricéntricas de E son $\left(\frac{4}{17}, \frac{9}{17}, \frac{8}{17}\right)$. De esta forma, E es el punto de equilibrio si los puntos A, B y C tienen las masas mencionadas anteriormente.

Las coordenadas baricéntricas de los puntos D y F se calculan de forma muy similar.

La recta que contiene al segmento BF se interseca con CA en M.

Parametricemos dichas rectas:

$$\mathcal{L}_{BF} = P(\alpha) = B + \alpha(BF) \quad (1)$$

$$\mathcal{L}_{CA} = Q(\beta) = C + \beta(CA) \quad (2)$$

$$(1) = (11,2) + \alpha(3,0)$$
$$= (11+3\alpha,\ 2).$$

$$(2) = (5,4) + \beta(-3,6)$$
$$= (5-3\beta,\ 4-6\beta)$$

Entonces, $M = P(\alpha) = Q(\beta)$

$$\Rightarrow 11+3\alpha = 5-3\beta \quad (3)$$
$$2 = 4-6\beta \quad (4)$$

De (2):

$$6\beta = 2$$
$$\Rightarrow \beta = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

De (1): $3\alpha = -6-1$

$$\alpha = \boxed{-7/3}.$$

Por un lado, $M = Q(\beta) = (1-\beta)C + \beta A$

Entonces: $m_C = 1-\beta$ y $m_A = \beta$

con $m_C + m_A = 1 = M_M$.

Y por otro lado: $M = P(\alpha) = (1-\alpha)B + \alpha F$.

$$\Rightarrow F = \frac{1}{\alpha}M + \frac{\alpha-1}{\alpha}B$$

Entonces: $M_M = \frac{1}{\alpha}$ y $m_B = \frac{\alpha-1}{\alpha}$.

Es decir, $M_M = -\frac{3}{7}K$ y $m_B = \frac{10}{7}K$

Pero $M_M = 1$, por tanto $K = -7/3$.

Esto implica que

$$M_A = \frac{1}{3},\ M_C = \frac{2}{3},\ M_B = -\frac{10}{3}$$

Concluimos que las coordenadas baricéntricas del punto F son $\left(\frac{1}{3}, -\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Notemos que $\mathcal{L}_{DB} \cap \mathcal{L}_{CA} = H$,

y que $\mathcal{L}_{DB}: P(\alpha) = D + \alpha(DB)$

$$= (2,1) + \alpha(9,1)$$

$$= (2+9\alpha, 1+\alpha)$$

$\mathcal{L}_{CA}: Q(\beta) = C + \beta(CA)$

$$= (5,4) + \beta(-3,-6)$$

$$= (5-3\beta, 4-6\beta)$$

Tenemos que: $P(\alpha) = Q(\beta) = H$,

entonces:

$$2+9\alpha = 5-3\beta \quad (1)$$

$$1+\alpha = 4-6\beta \quad (2)$$

De (2):

$$\alpha = 3-6\beta$$

En (1):

$$2+9(3-6\beta) = 5-3\beta$$

$$= 2+27-54\beta = 5-3\beta$$

$$51\beta = 24$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{24}{51} = \boxed{\frac{8}{17}}.$$

$$\Rightarrow \alpha = 3-6\left(\frac{8}{17}\right)$$

$$= \frac{51-48}{17} = \boxed{\frac{3}{17}}.$$

Por un lado tenemos que:

$$H = Q(\beta) = (1-\beta)C + \beta A.$$

Entonces $m_C = 1-\beta$ y $m_A = \beta$.

con $m_H = m_C + m_A = 1$.

Por otro lado:

$$H = P(\alpha) = (1-\alpha)D + \alpha B$$

$$\Rightarrow D = \frac{1}{1-\alpha} H - \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) B$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} H + \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right) B$$

Por tanto:

$$m_H = \frac{1}{1-\alpha} k \text{ y } m_B = \frac{\alpha}{\alpha-1} k.$$

$$\Rightarrow m_H = \frac{17}{14} k \quad y \quad m_B = -\frac{3}{14} k$$

Pero $m_H = 1$, por lo que $k = \frac{14}{17}$.

Entonces:

$$m_A = \frac{8}{17}, \; m_B = -\frac{3}{17}, \; m_C = \frac{9}{17}$$

Concluimos que las coordenadas baricéntricas del punto D son: $\left(\frac{8}{17}, -\frac{3}{17}, \frac{9}{17}\right)$.

Comprobaciones:

$$E = \frac{m_A A + m_B B + m_C C}{m_A A + m_B + m_C C}$$

$$= \frac{\frac{4}{17}(2,-2) + \frac{9}{17}(11,2) + \frac{8}{17}(5,4)}{\frac{4}{17} + \frac{9}{17} + \frac{8}{17}}$$

$$= \frac{\left(\frac{8}{17} + \frac{99}{17} + \frac{40}{17}, \frac{-8}{17} + \frac{18}{17} + \frac{32}{17}\right)}{\frac{21}{17}}$$

$$= \frac{\left(\frac{147}{17}, \frac{42}{17}\right)}{\frac{21}{17}} = \left(\frac{147}{21}, \frac{42}{21}\right) = \boxed{(7,2)}.$$

$$F = \frac{\frac{1}{3}(2,-2) - \frac{10}{3}(11,2) + \frac{2}{3}(5,4)}{\frac{1}{3} - \frac{10}{3} + \frac{2}{3}}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3} - \frac{110}{3} + \frac{10}{3}, -\frac{2}{3} - \frac{20}{3} + \frac{8}{3}\right)}{-\frac{7}{3}}$$

$$= \frac{\left(\frac{-98}{3}, \frac{-14}{3}\right)}{-\frac{7}{3}} = \left(\frac{98}{7}, \frac{14}{7}\right) = \boxed{(14,2)}.$$