Los sólidos platónicos

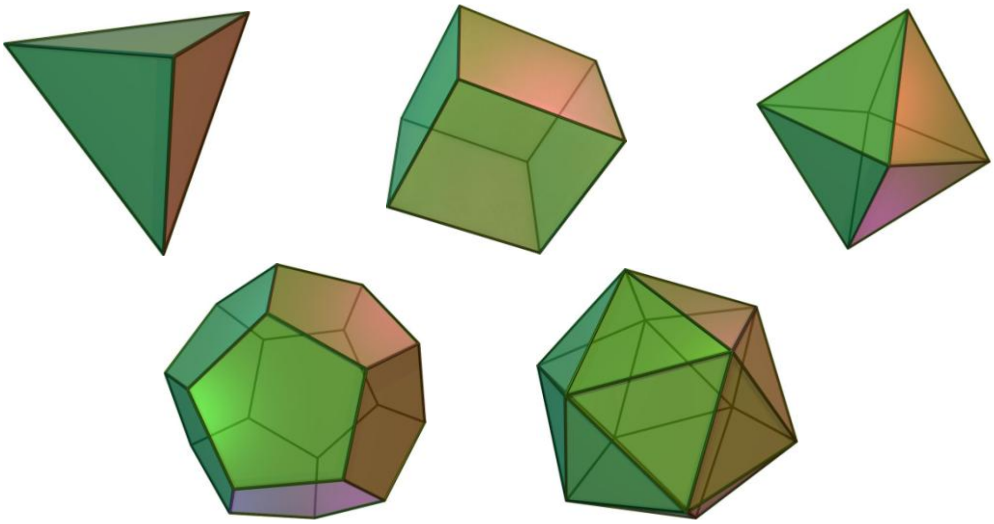
Historia, Propiedades y Arte

Carlos Quesada
20/12/2006

INDICE

INTRODUCCIÓN

En muchas ocasiones un objeto complejo e importante en el mundo de las matemáticas traspasa las fronteras de la misma, siendo conocido por personas ajenas a esta disciplina. Es el caso de los sólidos platónicos.

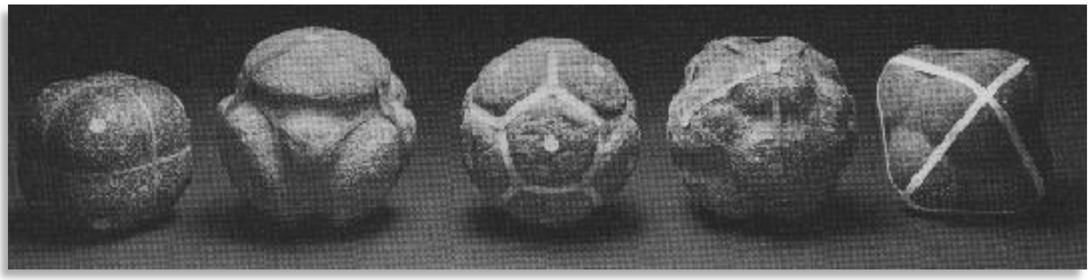


Cinco poliedros -el tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro - tienen unas determinadas propiedades que los hacen especialmente interesantes y bonitos. Tal vez no todo el mundo sabría decir *a priori* cuales son los sólidos platónicos, y menos aún dar una definición, pero sin duda los reconocerían, si los tuvieran delante. A lo largo de este trabajo recorreremos la historia de estos distinguidos poliedros, sus primeras apariciones, cuándo se comenzaron a considerar objetos matemáticos, porqué son solamente cinco y no más, su relevancia en la actualidad... Después profundizaremos más en la geometría y matemática de los sólidos, estudiando detalladamente sus propiedades, y analizaremos otros sólidos de características similares e igual belleza, los sólidos de Arquímedes, Kepler y Catalán. Por último, veremos sus aplicaciones fuera de las matemáticas, y la gran cantidad de apariciones que tienen estas figuras en el arte, en muchos pintores de diferentes épocas, y tal vez así lleguemos a entender por qué son unos elementos que nos resultan tan familiares. Para ello nos habremos topado con libros como los *Elementos* de Euclides, y hablaremos de genios como Arquímedes, Kepler, Escher, Leonardo da Vinci, Luca Pacioli, Euler…

EL ORIGEN DE LOS SÓLIDOS PLATÓNICOS

El origen de los sólidos platónicos como elemento para ser estudiado por las matemáticas se halla sin duda, en la antigua Grecia. Son los griegos quienes por primera vez entienden que *esos poliedros* han de ser estudiados. Sin embargo para que cualquier cultura se plantee estudiar algo en un determinado momento de su historia, tienen que conocerlo con anterioridad, e incluso, con mucha anterioridad. Y este es, en concreto, el caso de los sólidos platónicos.

La primera noticia que se conoce sobre estos poliedros, procede de un yacimiento neolítico en Escocia, donde se encontraron figuras de barro de aproximadamente 2000 a.C. Se cree que se trataba de elementos decorativos o, tal vez, de algún tipo de juego.

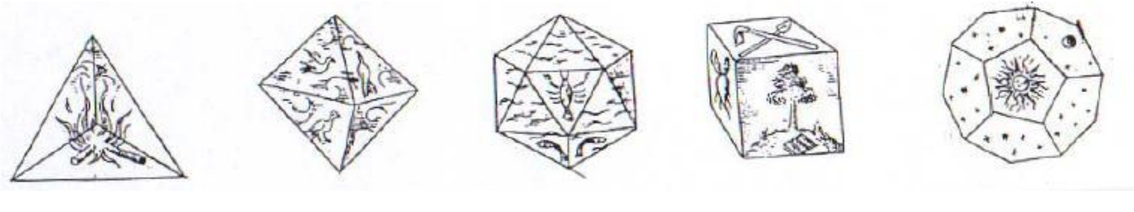


Es evidente que no había ninguna comprensión matemática de estos objetos, pero ya tenían identificados exactamente los cinco sólidos. Es probable que tampoco se preguntasen si había más sólidos o, en todo caso, era algo que no les preocupaba lo suficiente como para estudiarlo a conciencia.

En esa época, más o menos, se construyen las pirámides en Egipto. No tienen la forma exacta del tetraedro, pues la base es cuadrada; las pirámides presentan la forma de octaedros cortados por la mitad. El hecho aislado de que se utilice esta forma para la construcción de un edificio no es especialmente relevante, pues no hay indicios de que los egipcios utilizasen otros sólidos platónicos, pero sí es importante ver cómo empiezan a aparecer en la historia casi al mismo tiempo estos objetos matemáticos y cómo algunas civilizaciones les dan tanta importancia, como para construir - en el caso de los egipcios – un templo sagrado con un *semioctaedro*.

Pero la primera cultura que se fijó en estos poliedros como algo digno de ser estudiado, más aún estudiados matemáticamente, fue la antigua Grecia. Surgen allí personas interesadas en cultivar un saber *verdadero* y nace así, aproximadamente en el 530 a.C. la primera escuela matemática de la historia, la escuela pitagórica fundada por Pitágoras de Samos. Los pitagóricos veían en los resultados matemáticos una especie de verdad trascendental, y por eso se dedicaron al estudio de ellos. Aristóteles dijo que "*suponían que los elementos de los números eran la esencia de todas las cosas, y que los cielos eran armonía y número*". Y fueron estos cinco poliedros uno de los problemas que más les inquietó y fascinó, y sobre todo el dodecaedro al que atribuían una especial relación con el cosmos. Se planteaban por qué eran en concreto cinco poliedros, ni más ni menos. Por primera vez llamaron a estos cinco objetos con un nombre distintivo, los *sólidos pitagóricos*.

Se cree que fue Empédocles (480 – 430 a.C.) quien por primera vez asoció el cubo, el tetraedro, el icosaedro y el octaedro a la tierra, el fuego, el agua y el aire respectivamente. Platón (447 – 347 a.C.) relacionó posteriormente el dodecaedro con la *sustancia de la que estaban compuestas las estrellas*, ya que por aquellos tiempos se pensaba que ésta habría de ser diferente a cualquiera de las de la Tierra. En su diálogo Timeo, Platón pone en boca de Timeo de Locri estas palabras: "*El fuego está formado por tetraedros; el aire, de octaedros; el agua, de icosaedros; la tierra de cubos; y como aún es posible una quinta forma, Dios ha utilizado ésta, el dodecaedro pentagonal, para que sirva de límite al mundo".* Desde entonces los sólidos pitagóricos pasaron a llamarse sólidos platónicos, nombre que conservan en la actualidad.



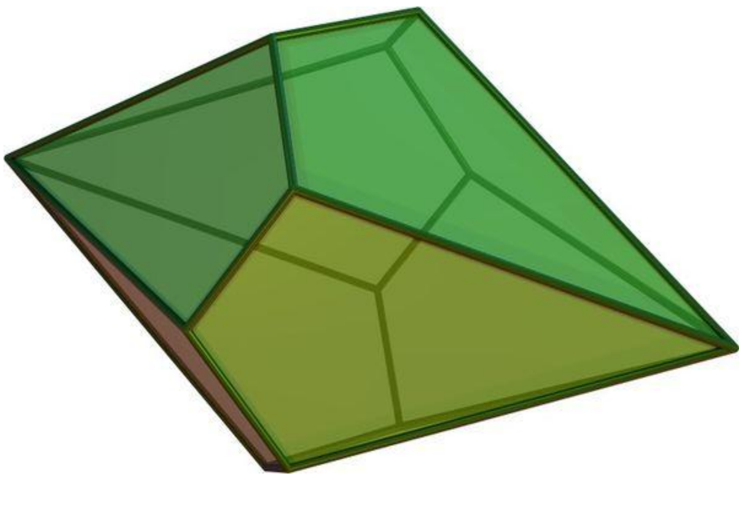
Sin embargo, quién verdaderamente formaliza, y consagra los sólidos platónicos como elementos matemáticos y realiza construcciones de los mismos, inscribiéndolos en la esfera, es Euclides de Alejandría , quien en su libro en su libro los *Elementos* demuestra un total entendimiento de las figuras. En torno al 300 a.C. Euclides escribe esta obra en la que pretende recoger todos los saberes sobre matemáticas conocidos hasta su tiempo, además de añadir resultados de su propio trabajo. Se divide en 13 libros en los que trata figuras, áreas, volúmenes, ángulos y todo tipo de construcciones, siempre acompañadas de demostraciones. El libro aporta proposiciones fundamentales, orientadas al colofón final de los *Elementos*: poder construir en el libro XIII estos 5 poliedros regulares inscribiéndolos en una circunferencia, además de argumentar por fin, porqué existen solo 5 sólidos platónicos en total.

Desde la proposición 13 a la 17 describe como construirlos, y en la proposición número 18, compara los lados de los poliedros. El lenguaje que utiliza para realizar estas construcciones es totalmente matemático. Llama a los vértices con letras A, B, C… y a las rectas que los unen con la unión de las dos letras AB, BC, CA… Las demostraciones que realiza, son muy farragosas, pues no utiliza ninguna ecuación, describe todo con palabras, como se puede ver en el anexo I donde he incluido una copia de las proposiciones 13 a 18. Con todo sigue los pasos rigurosamente y se basa en la proposiciones anteriores del libro. Así pues, se llega en los *Elementos* a una formalización de los sólidos platónicos que quedan introducidos en el mundo de las matemáticas de forma definitiva.

DEFINICIÓN DE SÓLIDO PLATÓNICO

Hemos hablado ya bastante sobre los sólidos platónicos y podemos identificarlos perfectamente, pero aún no tenemos una definición precisa de lo que es un sólido platónico. Vemos ciertas características comunes, como que cada uno de los sólidos solo tiene un tipo de polígono como cara, que todas están dispuestas “uniformemente”… Así pues, de entre todos los poliedros que nos podamos imaginar, se dice por definición que un sólido platónico es un *poliedro regular*. El nombre por lo pronto hace honor a la idea que tenemos de un sólido platónico.

Para entender de manera exacta que es la *regularidad* en el espacio recordemos la definición en el plano. En dos dimensiones los polígonos son regulares si todos sus ángulos son iguales entre sí y todos sus lados son también iguales entre sí. El equivalente a esta segunda condición en el espacio sería que todas las caras del poliedro regular sean iguales entre sí. Además, en el plano todos los polígonos regulares son convexos, propiedad que debemos imponer en tres dimensiones, ya que en principio un poliedro podría no ser no convexo (de hecho veremos más adelante que éstos son los sólidos de Kepler). Pero esto no es suficiente para nuestra idea de regularidad, no es muy difícil imaginar un poliedro convexo formado exclusivamente a base de romboides, y es improbable que alguien pudiera considerarlo *regular*.



Así pues necesitamos una condición un poco más fuerte, imponemos que los polígonos además de iguales entre sí, sean regulares.

En cuanto a la condición sobre la regularidad de los vértices, encontramos que en los poliedros no existe una definición natural de ángulo. La idea intuitiva es que todos los vértices han de ser iguales. Esto se cumple cuando cada vértice está rodeado por las mismas caras, ordenadas de la misma manera. Ni que decir tiene que esto se cumple en los sólidos platónicos, pues todas las caras son iguales, lo que implica que la sucesión de las mismas es invariante. Si un poliedro tiene todos sus vértices iguales entre sí se dice que es de *vértices uniformes*. Formalmente se define también un poliedro de vértices uniformes como aquel que para cada par de vértices existe una simetría del poliedro que transforma el uno en el otro isométricamente. Sabiendo ya como identificar si dos vértices son iguales, podemos llegar a la definición final.

Un poliedro regular es todo aquel poliedro convexo cuyas caras son polígonos regulares iguales entre sí, y cuyos vértices son iguales.

PROPIEDADES

Dimensiones fundamentales

En los sólidos platónicos como en cualquier poliedro existe una serie de dimensiones que es importante conocer. Éstas son el área de la superficie y el volumen del sólido. Sea a el tamaño de la arista de un sólido platónico. Entonces, si es el poliedro es:

Cubo:

Área: $A \quad 6(\text{área de cuadrados}) \quad 6a^2$

Volumen: $V \quad base{\cdot}altura \quad lado{\cdot}lado{\cdot}altura \quad a^3$

Tetraedro:

Área:

$$A \quad 4(\text{área de triangulos}) \quad 4(\frac{1}{2}base{\cdot}altura)$$

$$\text{por Tma Pitágoras}: \text{si base} \quad a, \text{ altura} \quad \sqrt{a^2 \quad \frac{a}{2} \quad ^2} \quad \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$$

$$A \quad 2{\cdot}a{\cdot}\frac{\sqrt{3}}{2}a \quad \sqrt{3}a^2$$

Volumen:

$$V \quad \frac{1}{3}base{\cdot}altura$$

la base es una cara de las anteriores, y la altura se obtiene de aplicar pitágoras sobre una arista y $2/3$ de la altura de uno de los triángulos:

$$altura \quad \sqrt{a^2 \quad \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a \quad ^2} \quad \sqrt{\frac{2}{3}a^2} \quad \sqrt{\frac{2}{3}}a$$

$$V \quad \frac{1}{3}{\cdot}\sqrt{3}a^2{\cdot}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a \quad \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

Para figuras planas, una manera fácil de calcular áreas es triangular la figura. Es decir cualquier polígono puede ser dividido en triángulos de los que sabemos calcular su área, con lo que el área del polígono es la suma de las otras áreas. Para calcular el área de los demás poliedros simplemente se suman las áreas de cada una de las caras. Calcular el volumen es, en cambio, mucho más complicado, hay que utilizar trucos parecidos al de la triangulación, pero con volúmenes, usando pirámides de las que sí que conocemos su volumen. También se pueden usar integrales, pero ésa es un arma con la que no contaban en la antigüedad. Como los cálculos son largos y constan solo de operaciones sin demasiado interés, muestro directamente el resultado final del resto de sólidos platónicos:

POLIEDRO	CUBO	TETRAEDRO	OCTAEDRO	DODECAEDRO	ICOSAEDRO
CARAS	6 cuadrados	4 triángulos equiláteros	8 triángulos equiláteros	12 pentágonos regulares	20 triángulos equiláteros
VÉRTICES	8	4	6	20	12
ARISTAS	12	6	12	30	30
ÁREA DE LA SUPERFICIE EXTERIOR	$6a^2$	$\sqrt{3}a^2$	$2\sqrt{3}a^2$	$3\sqrt{25 \quad 10\sqrt{5}}a^2$	$5\sqrt{3}a^2$
VOLUMEN	a^3	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$	$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$	$\frac{\sqrt{15 \quad 7\sqrt{5}}}{4}a^3$	$\frac{5\sqrt{3 \quad \sqrt{5}}}{12}a^2$

Simetría

Los sólidos platónicos están llenos de simetrías. De hecho, tienen todos los tipos de simetrías que existen en el espacio, es decir, respecto a un punto, respecto a un eje y respecto a un plano.

- Simetría puntual: Para cada uno de los 5 sólidos existe un punto, que es siempre el punto central del poliedro que es el centro de simetría en la simetría puntual.
- Simetría axial: Todos los sólidos tienen además varios ejes de simetría. Para cada poliedro la cantidad varía; pero en todos ellos el eje de simetría pasa por el centro de simetría.
- Simetría de plano: De nuevo todos los sólidos platónicos presentan simetrías respecto a planos, en las que los planos de simetría contienen al centro de simetría, y a combinaciones de los ejes de simetría.

Es demasiado complicado explicar cada simetría explícitamente para cada poliedro, pero sí hay que destacar que estas simetrías pueden ser clasificadas como grupos algebraicos.

El grupo formado por las simetrías del tetraedro se llama Grupo de simetría del tetraedro=T_d. El grupo tiene orden 24 lo que quiere decir que existen 24 simetrías diferentes para el tetraedro, de las cuales 6 son simetrías de plano.

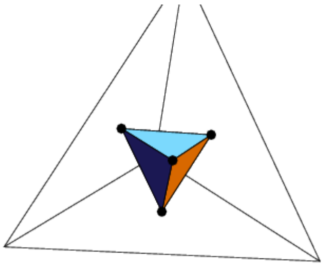
El grupo formado por las simetrías del cubo es el mismo que el grupo del octaedro y se llama Grupo de simetría del octaedro=O_h. Este grupo es de orden 48, y de estas simetrías, 9 son simetrías de plano.

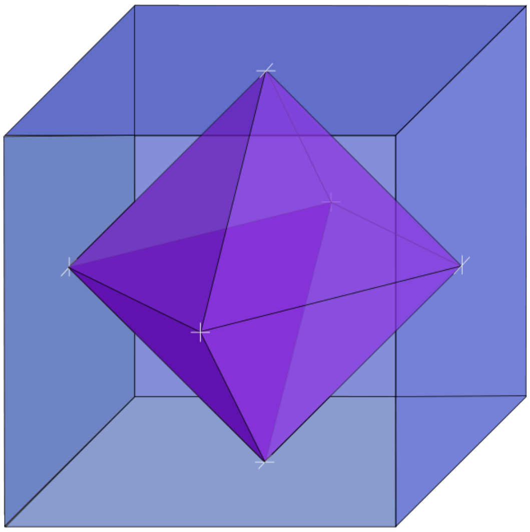
También el dodecaedro e icosaedro tienen las mismas simetrías, es decir comparten grupo de simetrías; el Grupo de simetría del icosaedro=I_h. Este grupo tiene 120 de las cuales, 15 son simetrías respecto a un plano.

Dualidad

Se define el poliedro P_d dual a un poliedro dado P_0 como el poliedro resultante de tomar los centros de las caras del poliedro P_0 y tomarlos como vértices de nuestro nuevo poliedro P_d. El poliedro dual de un poliedro dual es el inicial; $(P_d)_d = P_0$. Así pues se establece una reciprocidad entre las caras del poliedro y los vértices de su dual, y los vértices del inicial y las caras del dual. Los sólidos platónicos están también muy relacionados entre sí en cuanto a la dualidad.

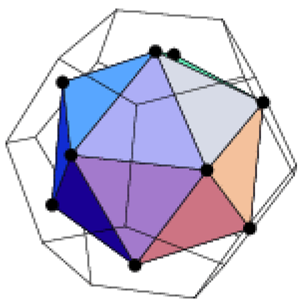
El tetraedro regular tiene 4 caras, lo que nos indica que su dual ha de tener 4 vértices. Si nos fijamos bien, el propio tetraedro tiene 4 vértices y si construimos su dual resulta ser el propio tetraedro. A este tipo de poliedros cuyo dual es el mismo, se les llama autoduales.





El cubo y el octaedro son por su parte duales entre sí. Efectivamente el número de caras de uno es el de vértices del otro, y viceversa, como se puede comprobar en la ilustración. Esta es la razón por la que ambos compartían el mismo grupo de simetría, cada simetría que se puede hacer con las caras de uno, las se puede hacer con los vértices del otro.

También son duales el dodecaedro y el icosaedro, el primero con 12 caras y 20 vértices y el segundo con 20 caras y 12 vértices. De nuevo, como recordaremos, ambos tienen el mismo grupo de simetría.

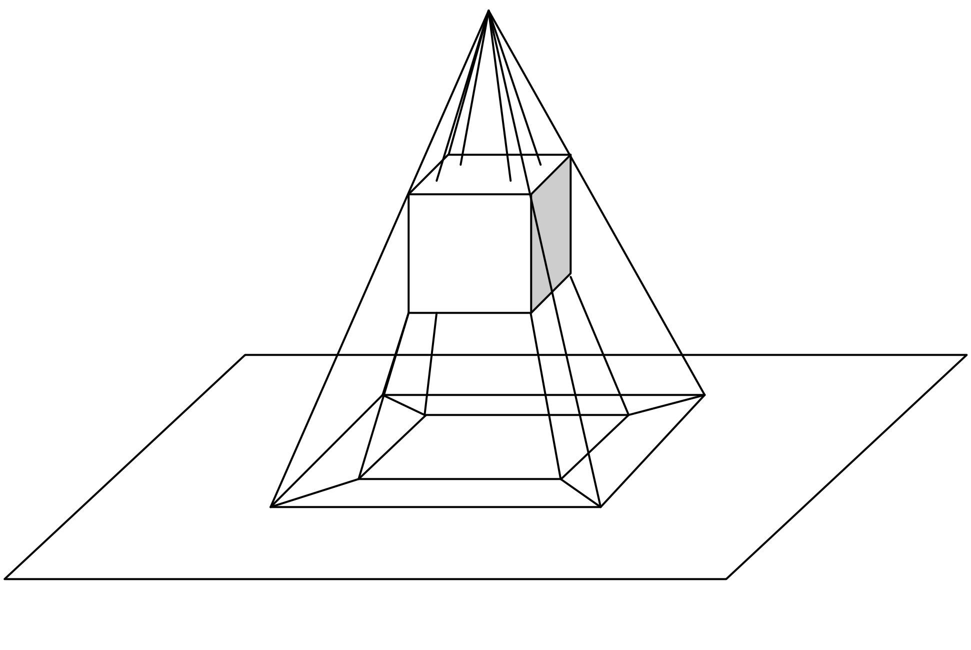


Propiedades combinatorias y fórmula de Euler

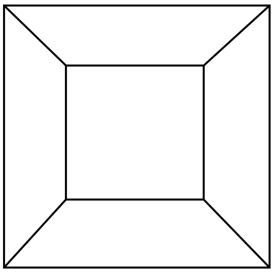
Todos los sólidos platónicos pueden ser denotados con el símbolo de Schläfli = {p,q} donde p es el número de lados de cada cara y q el número de aristas que llegan a cada vértice. Cualquier otra información combinatoria, como el número de caras, de vértices o de aristas se puede hallar a partir de estos números, simplemente dándose cuenta de que cada arista une dos vértices y tiene dos caras adyacentes, así pues:

$$pC \quad 2A \quad qV \quad \text{donde} \quad \begin{array}{ll} C & \text{número de caras} \\ A & \text{número de aristas} \\ V & \text{número de vértices} \end{array}$$

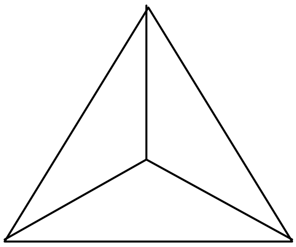
Como la representación gráfica puede resultar muchas veces complicada, a cada poliedro convexo se le puede asociar un grafo simple, esto es, asociar un diagrama plano que lo representa. Para hallar el grafo de un poliedro basta con suponer que éste es transparente, “acercarse mucho” a una de sus caras, y mirando de frente, dibujar lo que vemos. Obtenemos un grafo con el mismo número de aristas y vértices, aunque con una cara menos. Para el caso de los sólidos platónicos, lo que estamos haciendo es inscribir el poliedro deseado en una circunferencia y proyectarlo sobre un plano desde un punto que no pertenezca al poliedro, obteniendo el grafo con una cara menos, que corresponde a la cara desde donde se está proyectando.



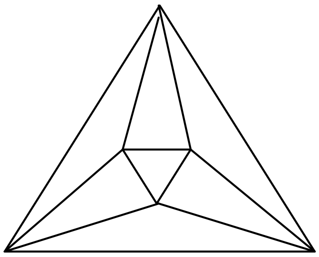
Estos son los grafos de los 5 sólidos platónicos:



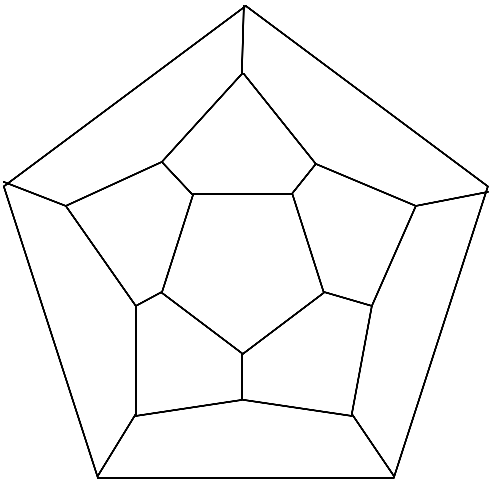
Cubo



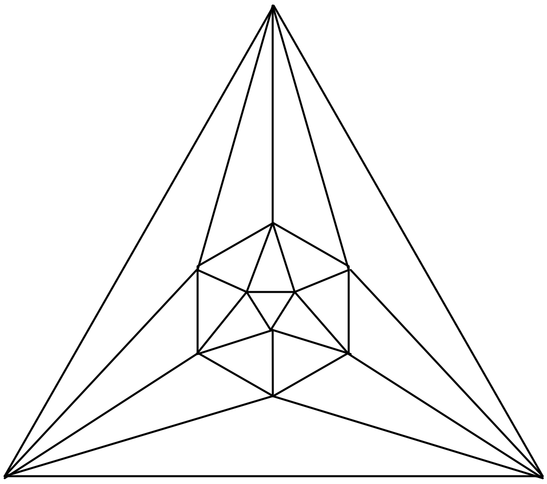
Tetraedro



Octaedro



Dodecaedro



Icosaedro

Sobre cada uno de los grafos obtenidos podemos aplicar ahora una fórmula válida para cualquier grafo plano conexo, la fórmula de Euler:

$$C \quad V \quad A \quad 1$$

Sin embargo, como habíamos perdido una cara al proyectar, la fórmula correcta para usar con los sólidos platónicos es:

$$C \quad V \quad A \quad 2$$

Conociendo todas estas propiedades y habiendo iniciado ya el estudio de los sólidos platónicos, tal vez nos vuelva a la cabeza aquella pregunta que ya se hacían los griegos en su día. ¿Por qué sólo 5, por qué no existen más poliedros que cumplan la sencilla propiedad de ser regulares? Lo cierto es que en el fondo no es tan difícil de comprender, de hecho, existen muchas pruebas usando muy diversos argumentos.

La más fácil e intuitiva y la que tal vez nos deje mas satisfechos es la prueba puramente geométrica, prácticamente tomada de los *Elementos* de Euclides con alguna modificación para adecuarla más a nuestro lenguaje:

1. Cada vértice une al menos tres caras, pues si uniese menos no sería un vértice sino un punto de una recta.
2. Para que un vértice tenga volumen, y por tanto pueda formar un poliedro, la suma de los ángulos tiene que ser menor que 360^{o} pues si alcanzase esta cifra sería un vértice plano.
3. Por tanto como debe haber un mínimo de tres ángulos cada uno ha de medir menos que 360/3 = 120^{o}.
4. Ningún polígono regular con más de 5 lados puede cumplir la condición 3, ya que el hexágono regular tiene ya sus ángulos de 120^{o}. Así pues estudiemos exhaustivamente todos los casos, y demostraremos así por qué no puede haber más de cinco:
    - Caras triangulares: Cada vértice del triángulo tiene 60^{o}, así que pueden unirse 3, 4 ó 5 por vértice, dando lugar al tetraedro, octaedro e icosaedro. No puede haber más pues superarían los 360^{o}
    - Caras cuadradas: Sólo pueden unirse 3 por vértice, pues con cuatro llegaríamos a los 360^{o}. Se forma el cubo.
    - Caras pentagonales: Para no sobrepasar los 360^{o} solo se pueden unir 3 pentágonos(108^{o} cada ángulo), dando lugar al dodecaedro

Otra prueba de gran belleza, a propósito de las propiedades de los grafos que hemos estudiado es la siguiente:

$\textit{sustituyamos } pC \quad 2A \quad qV \textit{ en la fórmula de Euler para poliedros}:$

$C \quad V \quad A \quad 2 \qquad \frac{2A}{p} \quad \frac{2A}{q} \quad A \quad 2$

$\textit{dividiendo por } 2A:$

$\frac{1}{p} \quad \frac{1}{q} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{A}$

$\textit{como } A \textit{ es obligatoriamente mayor que } 0:$

$\frac{1}{p} \quad \frac{1}{q} \quad \frac{1}{2}$

$\textit{como } p, q \textit{ han de valer al menos } 3, \textit{ las únicas opciones que cumplen}$

$\textit{la ecuación anterior son}:$

$\{3,3\} \quad \{4,3\} \quad \{3,4\} \quad \{5,3\} \quad \{3,5\}$

SEMIRREGULARIDAD Y OTROS SÓLIDOS

Ya sabemos lo que son, sus propiedades, incluso el motivo por el cual son solo cinco, pero cabe preguntarse si existen otros sólidos que también nos resulten armoniosos y sean interesantes en cuanto a sus propiedades. Y en efecto existen. Son sólidos que no cumplen alguna de las condiciones de la definición de sólido regular que antes dimos.

Poliedros semirregulares

Una de las condiciones de sólido regular que podemos debilitar es que las caras, a pesar de seguir siendo polígonos regulares, no sean iguales entre si. Mantenemos así la igualdad entre los vértices y la convexidad. Este tipo de poliedros se llaman poliedros semirregulares, pues tienen una cierta regularidad, dado que los vértices son iguales, pero no lo son tanto como los sólidos platónicos. Se dividen en:

- Sólidos Arquimedianos: Reciben el nombre porque Arquímedes los estudió ampliamente, y fue quien los encontró y clasificó. Existen exactamente 13 (Se pueden ver en el anexo II). Once de ellos se obtienen truncando sólidos platónicos. Son el tetraedro truncado, el cuboctaedro, el cubo truncado, el octaedro truncado, el rombicuboctaedro, el cuboctaedro truncado, el icosidodecaedro, el dodecaedro truncado, el icosaedro truncado (balón de futbol), el rombicosidodecaedro y el icosidodecaedro truncado. Los nombres que reciben están compuestos por el poliedro que es truncado y por el poliedro que lo trunca. Una propiedad muy importante de estos sólidos es que conservan el grupo de simetría del poliedro del que proceden. Así el tetraedro truncado tiene el grupo de simetría T_d. Los 5 siguientes, por provenir del cubo y octaedro, tienen el grupo O_h, mientras que las simetrías de los 4 últimos corresponden al I_h.
  Los otros 2 sólidos arquimedianos no se pueden obtener truncando poliedros, son el cubo romo y el icosidodecaedro romo. Entre ellos existe una complicada relación de correspondencia, y ninguno posee simetrías de plano. Tienen el grupo de simetrías O e I respectivamente, que corresponden a O_h e I_h pero sin las simetrías de plano.

- Prismas y antiprismas: Los prismas son poliedros compuestos por dos polígonos regulares situados en paralelo (directrices), cuyos lados están unidos por cuadrados. Los antiprismas, se construyen de la misma forma, pero uniendo los polígonos directrices por medio de dos triángulos equiláteros. Existen infinitos poliedros de esta clase, uno para cada polígono regular.

Sólidos de Catalán

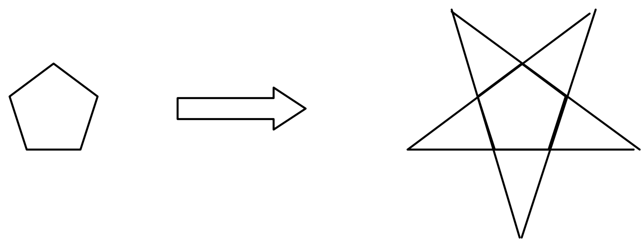
Toman el nombre de Eugène Catalan (1814-1894), quien los introdujo por primera vez. Para construirlos, volvemos a exigir que todas las caras sean iguales entre sí. En cambio, permitimos que los polígonos que las forman no sean regulares, provocando así que la condición sobre regularidad en los vértices se pierda, pues a un mismo vértice pueden llegar distintas combinaciones de ángulos de las caras.

Existen 13 en total, son: el triaquistetraedro; el dodecaedro rómbico; el triaquisoctaedro; el tetraquishexaedro; el icositetraedro deltoidal; el hexaquisoctaedro; el icositetraedro pentagonal; el triacontaedro rómbico; el triaquisicosaedro; el pentaquisdodecaedro; el hexecontaedro deltoidal; el hexaquisicosaedro y el hexecontaedro pentagonal. De nuevo pueden verse todos en el anexo II.

Son la misma cantidad de poliedros que sólidos de Arquímedes, y esto tiene una razón; los sólidos de Catalan son los duales de los arquimedianos. Así pues cada uno de estos sólidos tiene las mismas simetrías que su dual arquimediano. Si nos fijamos en la definición de dualidad de poliedros, se establece una relación entre caras (a través de sus centros) y vértices. Esta correspondencia está perfectamente conservada, la condición que quitábamos para los arquimedianos era la de que las caras fueran iguales, mientras que la que quitamos para los de Catalan es la de vértices iguales. Es decir las propiedades que conservan los vértices de uno son las mismas que las caras del otro, y viceversa.

Sólidos de Kepler-Poinsot

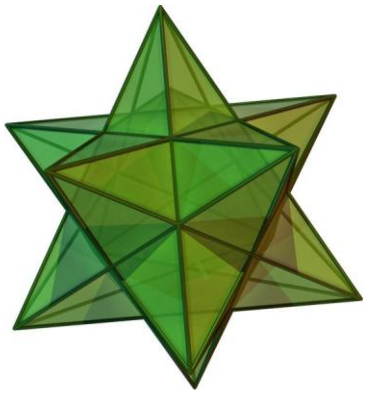
Para cada uno de los poliedros anteriores hemos debilitado una característica. Hagamos lo mismo ahora con la que nos falta; dejemos que los poliedros sean cóncavos. Sin embargo seguimos pidiendo que las caras sean regulares, lo cual en principio parece un poco extraño, porque ya hemos construido antes todos los poliedros posibles con polígonos regulares. Hay que recurrir entonces a polígonos regulares estrellados, el equivalente a los polígonos regulares, pero en versión no convexa, y que se obtienen a partir de ellos simplemente prolongando sus lados hasta que se corten. A este proceso se le llama estelación, porque se obtienen polígonos estrellados.



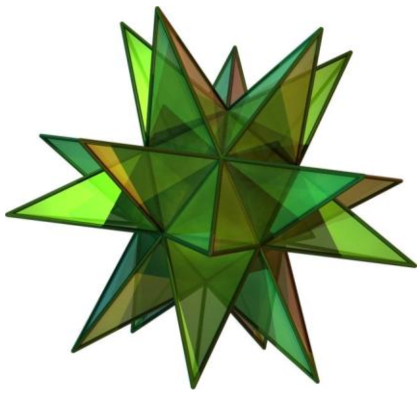
Johannes Kepler (1571-1630) aplicó en 1619 este proceso a los sólidos platónicos, para la pirámide, el cubo y el octaedro no funciona, pues la prolongación de las aristas no vuelve a intersecarse con ninguna otra, pero para el dodecaedro e icosaedro obtuvo dos poliedros regulares no convexos: el dodecaedro estrellado y el gran dodecaedro estrellado, ambos pueden verse en la siguiente página. Aunque el segundo proceda del icosaedro, los dos llevan dodecaedro en su nombre porque ambos tienen doce caras con la forma de la estrella regular de cinco puntas llamada pentagrama. El poliedro se autointerseca, eso quiere decir que sus caras no son visibles por completo porque otras la atraviesan ocultándola parcialmente. Ambos conservan la simetría I_h precisamente por proceder del icosaedro y dodecaedro.

Independientemente del trabajo de Kepler, Louis Poinsot (1777-1859) estudió los poliedros. Redescubrió en 1809 los dos anteriores, e introdujo dos más. Poinsot pensó que si por el hecho de ser convexo se podía extender sin ningún problema el concepto de poliedro a un objeto que se autointersecase y donde las caras fueran estrellas, también podría hacer esto para los vértices y, en vez de hacer que los poliedros tuvieran los vértices *habituales*, fueran vértices también estrellados. En concreto obtuvo el gran dodecaedro y el gran icosaedro, en los que las caras vuelven a ser pentágonos y triángulos regulares respectivamente mientras que los vértices tomaban *figura vértice* de pentagrama. Conservan el grupo de simetría del icosaedro.

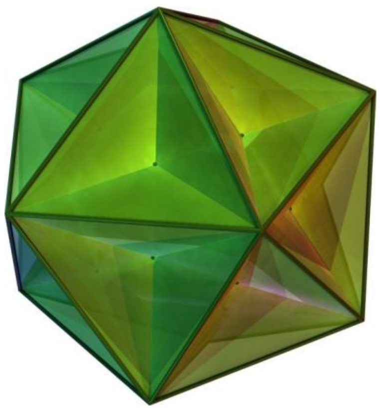
Dodecaedro estrellado



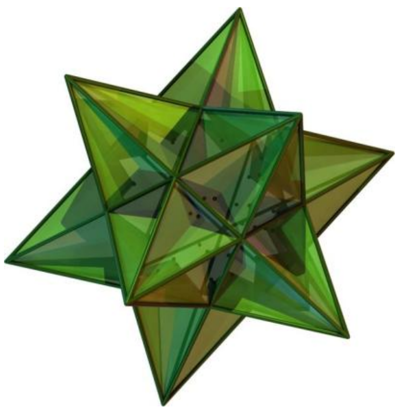
Gran dodecaedro estrellado



Gran dodecaedro



Gran icosaedro



LOS SÓLIDOS EN LA NATURALEZA, TECNOLOGÍA Y ARTE

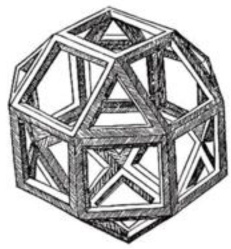
No parece que unas figuras tan particulares, especiales y únicas como son los sólidos platónicos puedan ser algo demasiado común en la naturaleza, sin embargo la naturaleza parece tener una especial predilección por adoptar formas que nos resultan bellas, y este es el caso de los sólidos platónicos.

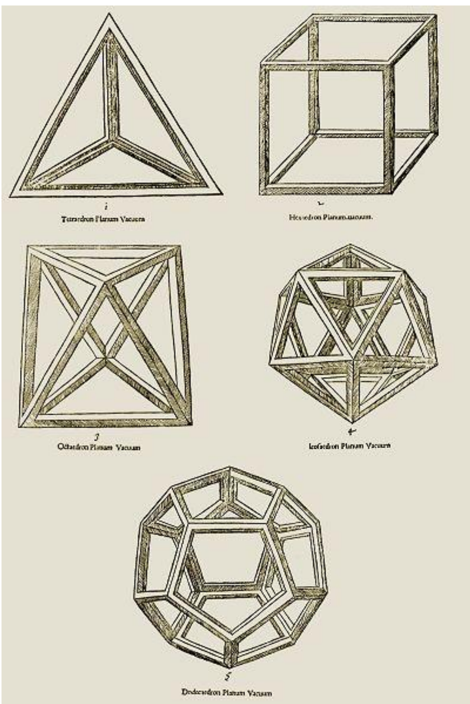
El cubo, el tetraedro y octaedro aparecen de forma natural en las estructuras de los cristales, de hecho todas las posibles configuraciones cristalinas están formas exclusivamente a base de diferentes combinaciones de estos tres poliedros. También hay seres vivos con esta forma, por ejemplo un tipo de protozoos llamados *radiolarios* tienen forma de cubo, octaedro, dodecaedro, icosaedro… y de hecho el nombre científico que reciben incorpora el respectivo poliedro del que reciben la forma. También muchos virus como el del herpes o el del SIDA tienen forma de icosaedro. Estos virus están compuestos por unidades básicas de proteínas, que se unen en forma de icosaedro por ser muy eficiente.

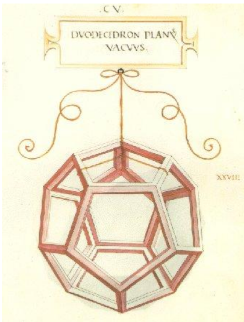
También en la tecnología aparecen cada día más los sólidos platónicos. Un ejemplo se halla en meteorología. En detrimento de la usual malla de latitud y longitud utilizada para las predicciones, hay en los modelos meteorológicos un creciente interés por mallas con forma de icosaedro.

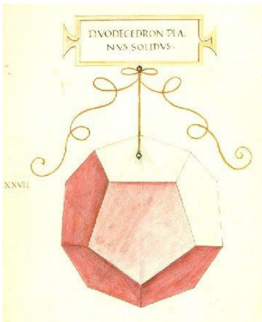
Estos poliedros se usan asimismo en el ocio, sirven para hacer dados, el más común es el dado cúbico, pero todas las otras formas se utilizan para juegos de rol.

Y sin duda han aparecido en gran cantidad de cuadros de muy diferentes artistas. Cuando hubo mayor vinculación entre los sólidos y el arte fue probablemente en el renacimiento. Con el interés por estudiar los saberes antiguos, renacen las matemáticas, y una de las primeras obras que leen es los *Elementos* de Euclides. Cobran importancia entre los matemáticos y dibujantes los sólidos platónicos, a los que atribuían gran belleza y casi perfección. Los artistas empezaron a utilizar los poliedros como herramienta para desarrollar determinados aspectos de la perspectiva. Este es el caso de algunos pintores como Paolo Uccello (1397-1475), o Piero della Francesca (1410-1492). Este último, realizó novedosas perspectivas y trabajos inspirados en cierto sentido el los sólidos, pero sus técnicas fueron olvidadas y posteriormente atribuidas a Luca Pacioli. Fray Luca Bartolomeo Pacioli (1445-1514), matemático italiano precursor de la probabilidad y contabilidad, hizo varias publicaciones entre las cuales destacaba *De divina proportione* de 1509. El principal tema del libro es la proporción áurea y su aplicación a la arquitectura. El tercer tomo es una traducción de los escritos en latín de Piero della Francesca sobre los *"cinco sólidos regulares"* en la que no mencionaba a su verdadero autor, motivo por el cual no se atribuyeron esos trabajos a su verdadero autor. Otra de las cosas más importantes de esta obra es la incorporación de dibujos sobre sólidos platónicos de Leonardo da Vinci, que recibía clases de matemáticas de Pacioli. Para cada figura daba una versión sólida y otra hueca, basada en figuras de madera, que unido al dominio de la perspectiva permitía una distinción mucho mayor de todas las caras. Además de sólidos platónicos, Leonardo dibuja la primera imagen de un rombicuboctaedro (figura de la derecha) de la que se tiene noticia, aparte de otra gran variedad de poliedros.



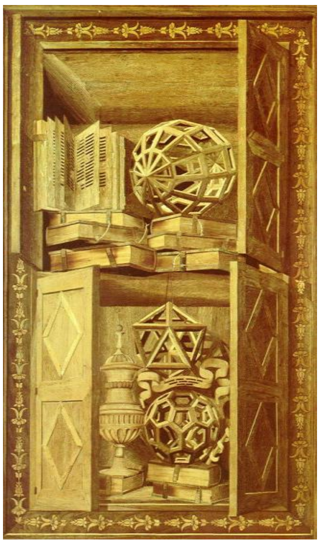


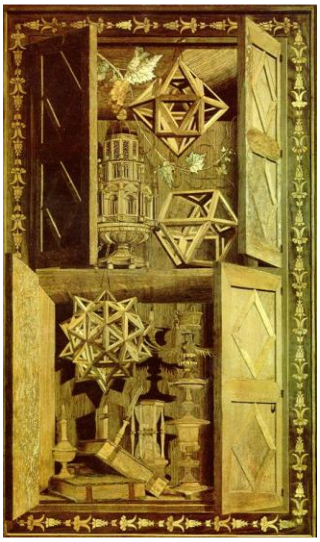




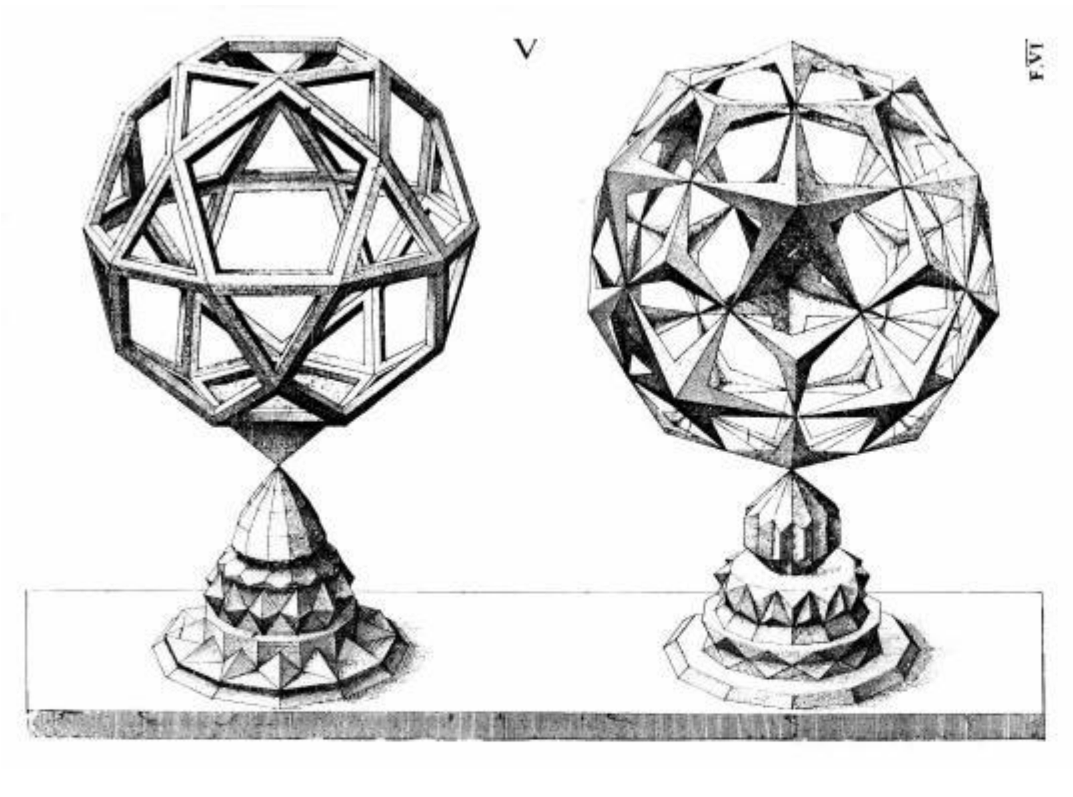
Posteriormente, en 1495 Jacopo de Barbari pinta a Luca Pacioli. Aparece de nuevo un rombicuboctaedro, en este caso cristalino y relleno hasta la mitad con agua. En el cuadro, Pacioli aparece resolviendo un problema de geometría de Euclides y a su derecha se muestra un pequeño dodecaedro. Como vemos la pasión por este tipo de formas en aquella época era enorme.

Prácticamente contemporáneos, de 1520, son los mosaicos de Fray Giovanni, en los que incluye poliedros muy variados en maderas de diferentes tonos. Abajo, en el dibujo de la izquierda, aparece un poliedro creado a base de triángulos. No es ninguno de los que hemos estudiado, pero si nos fijamos con atención vemos que es un icosidodecaedro, al cual se le han sustituido sus caras pentagonales por triángulos que forman otro nuevo vértice. En el cuadro central aparece de nuevo el poliedro, dibujado ya por Da Vinci, que trata de asemejarse a una esfera, acompañado de un icosaedro y un icosaedro truncado. En el de la derecha aparece de nuevo el icosidodecaedro modificado, junto con un cubo modificado por el mismo procedimiento, y un cuboctaedro.



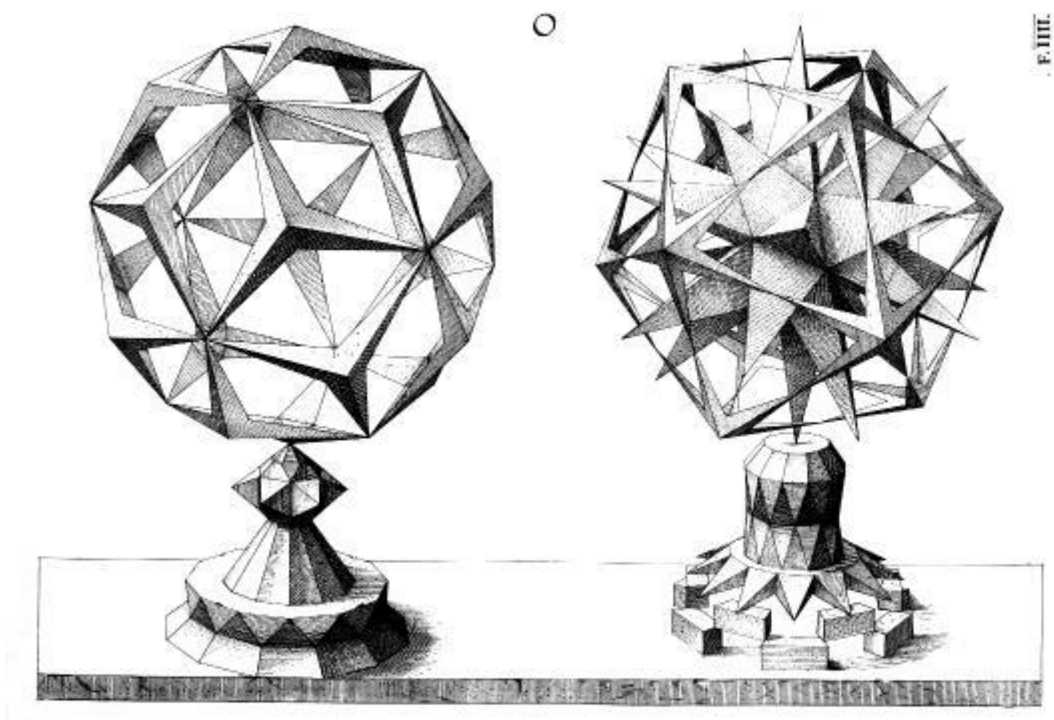


No solo artistas italianos dibujaron estas bellas figuras, la escuela alemana tuvo artistas que usaron estructuras poliédricas. Durero incluye extraños sólidos como elementos secundarios en algunos de sus cuadros dando muchas veces libertad de interpretación al espectador. Pero quien verdaderamente destaca en la escuela alemana es el orfebre Wentzel Jamnitzer (1508-1585), considerado uno de los mejores y más creativos artistas de poliedros de la historia. Su libro *Perspectiva Corporum Regularium* es una joya de diseños geométricos. En las imágenes de abajo se aprecia que el icosidodecaedro de la izquierda sigue la estética de los poliedros ya dibujados por Da Vinci, pero la figura de la derecha es totalmente novedosa. Representa un icosaedro (las aristas que unen los vértices con forma de estrella de tres picos) y un dodecaedro (las aristas de las estrellas de cinco picos) unidos.



En las figuras de la página siguiente vemos de nuevo el estilo característico de Jamnitzer con sus vértices en forma de estrella. En este caso las figuras son aun más sorprendentes. En la izquierda tenemos un triacontaedro rómbico , uno de los sólidos de Catalan, tres siglos antes de su nacimiento. Por supuesto, Jamnitzer no conocía sus propiedades ni los formalizó matemáticamente, solo los imaginaba y dibujaba, y por eso son los sólidos de Catalan y no de Jamnitzer.

El dibujo de la derecha es incluso mejor. Aparece la figura del icosaedro, de nuevo con los vértices estrellados. Las puntas de cada una de las estrellas son los vértices de un dodecaedro, que no está dibujado explícitamente, pero que sin duda el autor insinúa. Por último en el interior del icosaedro se halla el gran dodecaedro estrellado, otra vez mucho antes de que Kepler publicase su trabajo acerca de los poliedros regulares no convexos. Tal vez viendo esta figura sea mucho más fácil entender por qué el dodecaedro, el icosaedro y el gran dodecaedro estrellado pertenecen al mismo grupo de simetría.

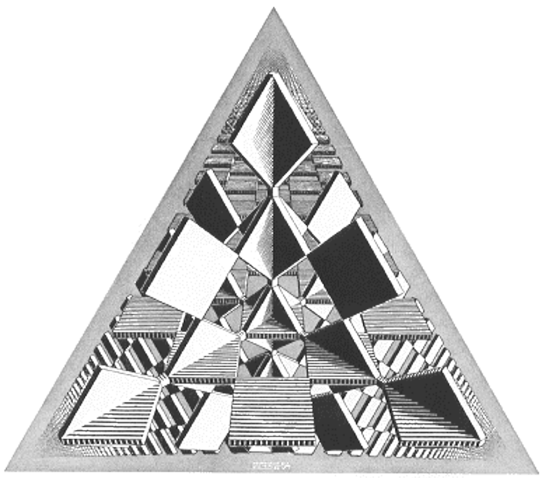


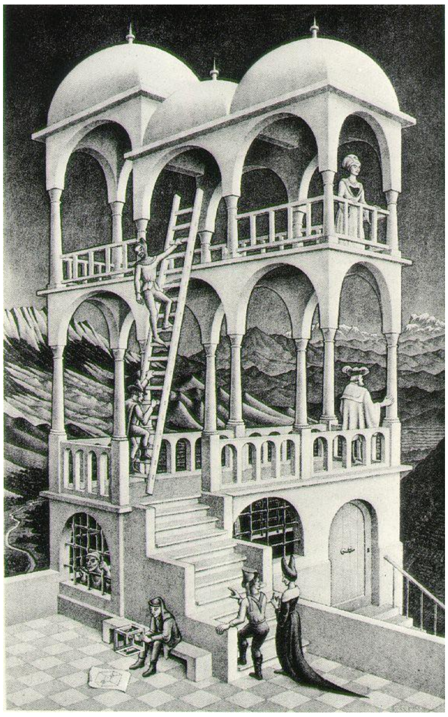
Poco a poco los cuadros con figuras de sólidos fueron perdiendo importancia, hasta quedar prácticamente en el olvido en el mundo del arte. Fue Escher quien con su increíble imaginación y originalidad rescató a los sólidos platónicos para incorporarlos en innovadores cuadros.

Maurits Cornelis Escher (1898-1972) fue un conocido artista gráfico alemán que se inspiraba en matemáticas para muchos de sus trabajos. Le apasionaban especialmente las teselaciones en el plano, las sucesiones infinitas, o en su etapa más avanzada, crear objetos imposibles basados en sólidos(platónicos o de otro tipo). Probablemente su primer trabajo en el que incluyó un sólido platónico fuera en su litografía *Reptiles* de 1943. Y lo hace a lo grande:

El dodecaedro, al que se asociaba en la antigüedad el universo, sirve en el cuadro al reptil como escalón más alto en su evolución por el cuadro. Cuando llega arriba el animal resopla victorioso, al hallarse encima de una de las figuras más perfectas de las matemáticas.

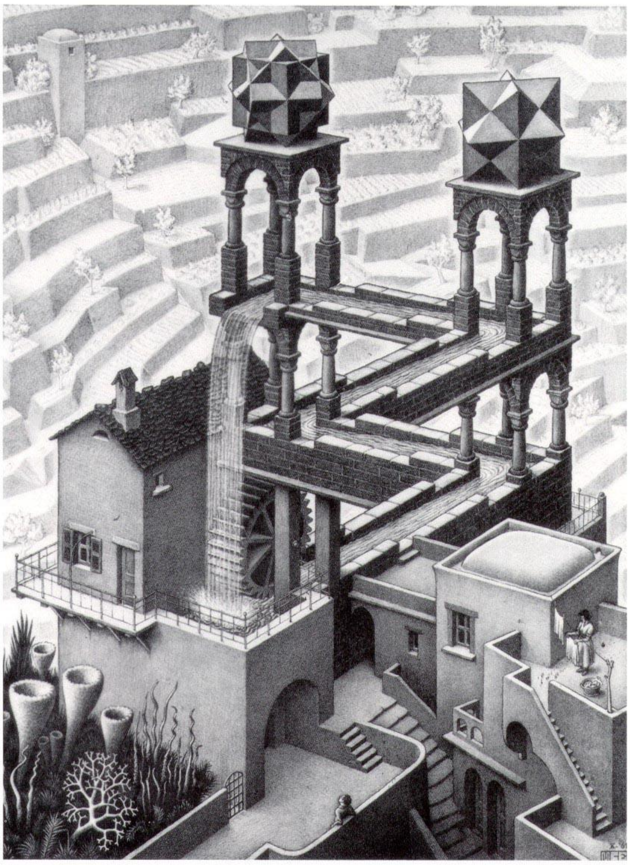
También entre sus trabajos con sucesiones que se hacen infinitamente pequeñas, o que presentaban forzadas perspectivas que nos muestran puntos de fuga, encontramos cuadros relacionados con los sólidos platónicos. En *Tres planos que se intersecan* los vértices de la intersección crean un tetraedro regular. Además en el centro, donde se cortan los tres planos, se distingue perfectamente un octaedro.



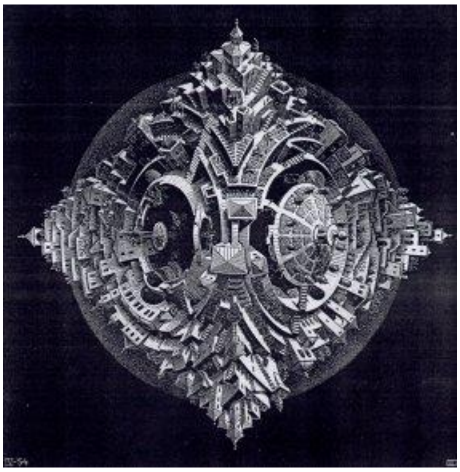


Entre las obras de su etapa mas tardía, la de creación de objetos imposibles aparecen muchos poliedros. La mayor parte de las veces se trata de cubos imposibles, como en el cuadro *Belvedere* de 1958, en el que construye un edificio imposible. Dicho edificio consta de dos plantas rectangulares, situadas en direcciones perpendiculares, y la manera de conseguir ese efecto es cambiar las aristas que deberían de unir cada una de las partes separadas por columnas, que son en esencia cubos. Además, abajo aparece un sentado en un banco un hombre con un pequeño cubo imposible.

A pesar de que lo más común sea utilizar estos cubos falsos, también utiliza el triángulo de Penrose. En la litografía *Cascada* de 1961, Escher basa el edificio en este imposible triángulo dando la sensación de estar ante un edificio cuya relación entre pisos recuerda a un tetraedro, pero que en definitiva no es más que algo imposible. Además en la parte superior de la torre izquierda aparece un sólido como elemento decorativo. Se trata de tres cubos intersecados. En la derecha ocurre lo mismo, solo que esta vez se trata de tres octaedros.



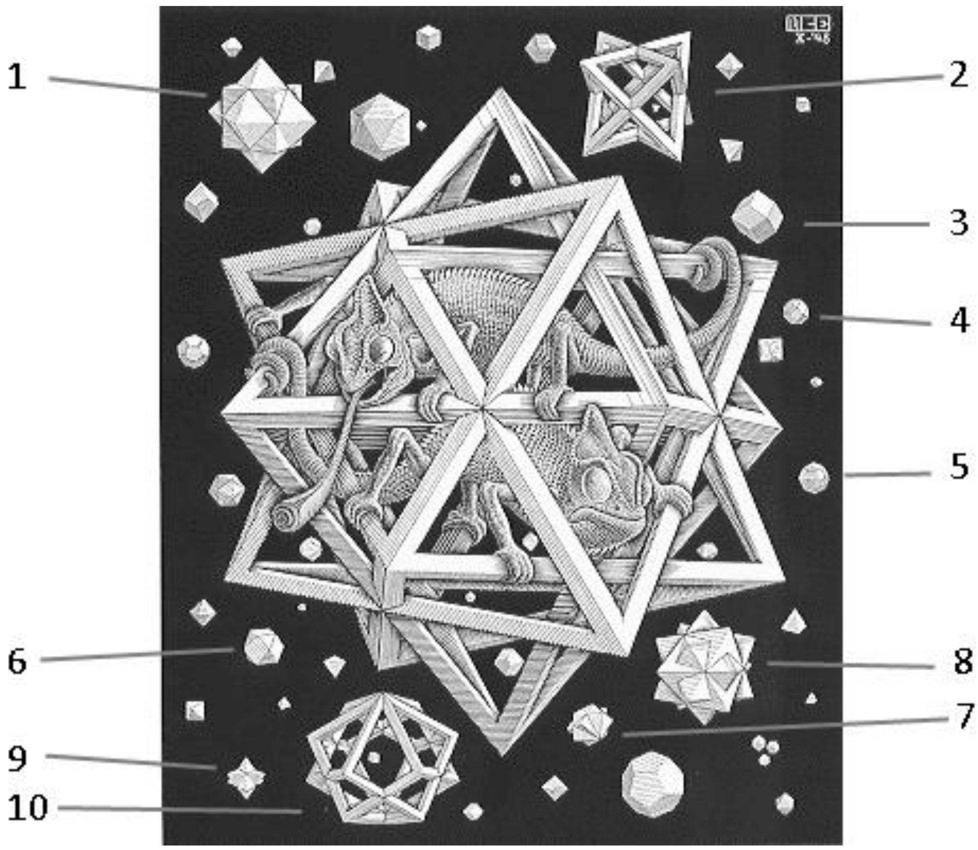
Sin embargo su etapa más centrada en los poliedros, es sin duda entre 1948 y 1954, cuando dibuja varios cuadros centrados totalmente en este tema, donde los poliedros aparecen como elemento principal y no como algo meramente decorativo. En *Planetoide doble* y *Planetoide tetraédrico*, utiliza tetraedros que crean extraños planetas, en el primero son dos que se intersecan por los centros de las aristas y en el segundo tan solo uno que da lugar a dos mundos distorsionados.



En otras dos litografías de 1950 y 1952, incluye la figura del dodecaedro estrellado. En *Gravedad* (abajo a la izquierda) salen del dodecaedro estrellado reptiles de una forma bastante caótica. En *Orden y caos* el dodecaedro estrellado está parcialmente dentro de una esfera, que representan el orden, por oposición a los cristales rotos de alrededor.

Pero tal vez el trabajo más completo de todos los de Escher, en lo que a poliedros se refiere, sea la xilografía *Estrellas* de 1948. La figura principal es una gran estrella, compuesta por 3 octaedros huecos unidos, en cuyo interior se agarran dos camaleones. Aparte de esta figura, que ya de por sí es muy interesante, vemos que todas las estrellas del fondo son otros poliedros. Hay varios tetraedros, octaedros, icosaedros, cubo, pero entre ellas hay un recital de figuras aún más significativas:

1. Cubo intersecado con octaedro
2. Dos tetraedros huecos intersecados
3. Rombododecaedro
4. Rombicuboctedro
5. Icositetraedro deltoidal
6. Cuboctaedro
7. Dos cubos intersecados
8. Tres octaedros unidos como la estrella principal
9. Dos tetraedros
10. Dos cubos huecos unidos por un vértice



CONCLUSIÓN

Nos preguntábamos en la introducción que hacía a los sólidos platónicos unos poliedros tan especiales y porqué nos resultan tan bonitos. Hemos analizado sus propiedades geométricas, viendo que la propia definición de sólido platónico implica ser muy regular, ya que lo son sus aristas, caras y vértices. Tienen muchas simetrías, algo que unido a la regularidad suele hacer que algo nos parezca estético. De hecho, son tan sumamente regulares que aunque debilitemos una de sus propiedades obtenemos otros poliedros que también tienen gran cantidad de simetrías y que siguen siendo bastante regulares. Hemos demostrado además que son sólo cinco, lo cual unido a todo lo anterior, responde perfectamente a nuestra pregunta de porqué son tan especiales.

Además, como se prometió, hemos recorrido la historia de tan fascinantes objetos, viajando hasta la antigua Grecia, y estudiando grandes matemáticos, de muy diferentes épocas. No sólo estudiamos su historia matemática sino que hemos visto su relevancia en la historia del arte, estudiando parte de la gran cantidad de cuadros en los que aparecen, y en los que se pone de nuevo de manifiesto la indudable elegancia y belleza de los sólidos platónicos.

ANEXO I: Proposiciones de los Elementos

Proposición 13. Construir una pirámide inscrita en una esfera dada y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es una vez y media el del lado de la pirámide.

Pongamos el diámetro AB como esfera y cortemos por C de tal manera que AC es el doble de CB, describamos el semicírculo ADB de AB, dibujemos CD formando ángulos rectos con AB, y dibujemos DA. [VI 9, I 11]. Pongamos el círculo EFG con radio igual a DC, inscribimos el triángulo equilátero EFG en el círculo EFG, tomamos el centro H del círculo, y dibujamos EH, HF, y HG. [I 1, IV 2]. Levántese HK desde el punto H formando ángulos rectos con el plano del círculo EFG, quítese HK igual a la línea recta AC desde HK, trácense KE, KF, y KG. [XI 12, I 3]. Ahora, como KH forma ángulos rectos con el plano del círculo EFG, entonces forma ángulos rectos con todas las líneas rectas y están en el plano del círculo EFG. Pero cada una de las rectas HE, HF y HG la toca, entonces HK forma ángulos rectos con cada una de las rectas HE, HF, y HG. [XI Def. 3]. Y, como AC es igual a HK, y CD es igual a HE, y comprenden ángulos rectos, entonces la base DA es igual a la base KE. Por la misma razón cada una de las rectas KF y KG son iguales a DA. Entonces las tres líneas rectas KE, KF y KG son iguales entre sí. [I 4]. Y, dado que AC es doble de CB, entonces AB es triple de BC. Pero dado que AB es a BC como el cuadrado de AD es al cuadrado de DC como se demostrará seguidamente. Entonces el cuadrado de AD es el triple del cuadrado de DC. Pero el cuadrado de FE es también el triple del cuadrado de EH, y DC es igual a EH, entonces DA es también igual a EF. [XIII 12]. Pero ha sido demostrado que DA es igual a cada una de las rectas KE, KF y KG, entonces cada una de las líneas rectas EF, FG y GE son también iguales a cada una de las líneas rectas KE, KF y KG. Entonces los cuatro triángulos EFG, KEF, KFG y KEG son equiláteros. Por lo tanto ha sido construida una pirámide con cuatro triángulos equiláteros, el triángulo EFG empezando como base y el punto K como vértice. El propósito siguiente es comprenderla en la esfera dada y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es una vez y media el cuadrado del lado de la pirámide. Prolónguese la recta HL en línea recta con KH, y hágase HL igual a CB. [I 3]. Ahora, dado que AC es a CD como CD es a CB, mientras AC es igual a KH, CD igual a HE y CB igual a HL, entonces KH es a HE como EH es a HL. Entonces el rectángulo KH en HL es igual al cuadrado en EH. [VI 8, Cor., VI 17]. Y cada uno de los ángulos KHE, EHL es recto, entonces el semicírculo descrito en KL pasa a través de E también. [VI 8, III 31]. Entonces si KL permaneciendo fija, EHL es recto, el semicírculo se hace girar y se vuelve a la misma posición de donde empezó a moverse, entonces pasará a través de los puntos F y G, puesto que, si FL y LG son trazadas, luego los ángulos en F y G resultan ángulos rectos, y la pirámide queda comprendida en la esfera dada. Para KL, el diámetro de la esfera, igual al diámetro AB de la esfera dada, puesto que KH se ha hecho igual a AC, y HL a CB. Yo digo además que el cuadrado del diámetro de la esfera es una vez y media el cuadrado en el lado de la pirámide. Puesto que AC es doble de CB, entonces AB es triple de BC y, en la conversión, BA es una vez y media AC. Pero BA es a AC como el cuadrado de BA es al cuadrado de AD. Entonces el cuadrado de BA es también una vez y media el cuadrado de AD. Y BA es el diámetro de la esfera dada, y AD es igual al lado de la pirámide. Entonces el cuadrado del diámetro de la esfera es una vez y media el cuadrado del lado de la pirámide. Q.E.F.

LEMA

Se debe demostrar que AB es a BC como el cuadrado de AD es al cuadrado de DC. Pongamos la figura del semicírculo, trácese DB, constrúyase el cuadrado EC en AC, y complétese el paralelogramo FB. [I 46]. Puesto que el triángulo DAB es equiangular con el triángulo DAC, entonces BA es a AD como DA es a AC. Entonces el rectángulo BA en AC es igual al cuadrado de AD. [VI.8, VI.4, VI.17]. Y puesto que AB es a BC como EB es a BF, y EB es el rectángulo BA en AC, porque EA es igual a AC, y BF es el rectángulo AC en CB, entonces AB es a BC como el rectángulo BA en AC es al rectángulo AC en CB. [VI 1]. Y el rectángulo BA en AC igual al cuadrado de AD, y el rectángulo AC por CB igual al cuadrado de DC, porque la perpendicular DC es la media proporcional entre los segmentos AC y CB de la base, porque el ángulo ADB es recto. Entonces AB es a BC como el cuadrado de AD es al cuadrado de DC. [VI 8, Cor.]. Q.E.D.

Proposición 14. Construir un octaedro contenido en una esfera como en la proposición anterior, y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el doble del cuadrado del lado del octaedro.

Sea el diámetro AB de la esfera dada, biseccionarlo por el punto C, describir el semicírculo ADB sobre AB, dibujar CD desde el punto C formando ángulos rectos con AB, y trazar DB. [I 11]. Sea el cuadrado EFGH, que tenga cada uno de sus lados igual a DB, trazar HF y EG, levántese la línea recta KL desde el punto K formando ángulos rectos con el plano del cuadrado EFGH, y prolónguese hacia el otro lado del plano KM. [I 46, XI 12]. Quítese KL y KM de las rectas KL y KM respectivamente iguales a una de las líneas rectas EK, FK, GK, o HK, y trazar LE, LF, LG, LH, ME, MF, MG, y MH. [I 3]. Entonces, dado que KE es igual a KH, y el ángulo EKH es recto, entonces el cuadrado de HE es doble del cuadrado de EK. Asimismo, dado que LK es igual a KE, y el ángulo LKE es recto, entonces el cuadrado de EL es doble del cuadrado de EK. [I 47]. Pero el cuadrado de HE se ha demostrado que es doble del cuadrado de EK, entonces el cuadrado de LE es igual al cuadrado de EH. Entonces LE es igual a EH. Por la misma razón LH es también igual a HE. Entonces el triángulo LEH es equilátero. De manera semejante podemos demostrar que cada uno de los triángulos restantes las bases de los cuales son los lados del cuadrado EFGH y los puntos L y M son sus vértices son equiláteros, entonces ha sido construido el octaedro comprendido por ocho triángulos equiláteros. [XI Def. 26]. El siguiente objetivo es comprenderlo en la esfera dada, y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es doble del cuadrado del lado del octaedro. Dado que las tres líneas rectas LK, KM y KE son iguales entre sí, entonces el semicírculo descrito sobre LM pasa a través de E. Y por la misma razón, si, LM permanece fijo, el semicírculo se hace girar y se devuelve a la misma posición desde donde empezó a desplazarse, entonces pasa también a través de los puntos F, G y H, y el octaedro estará comprendido en la esfera. Yo digo además que también estará comprendido en la esfera dada. Porque, dado que LK es igual a KM, mientras KE es común, y comprenden ángulos rectos, entonces la base LE es igual a la base EM. [I 4]. Y, dado que el ángulo LEM es recto, porque está en un semicírculo, entonces el cuadrado de LM es doble al cuadrado de LE. [III 31, I 47]. De nuevo, dado que AC es igual a CB, entonces AB es doble de BC. Pero AB es a BC como el cuadrado de AB es al cuadrado de BD, entonces el cuadrado de AB es doble del cuadrado de BD. Pero se ha demostrado que el cuadrado de LM es doble del cuadrado de LE. Y el cuadrado de DB es igual al cuadrado de LE, porque EH se ha hecho igual a DB. Entonces el cuadrado de AB es igual al cuadrado de LM. Entonces AB es igual a LM. Y AB es el diámetro de la esfera dada, entonces LM es igual al diámetro de la esfera dada. Entonces se ha comprendido el octaedro en la esfera dada, y ha sido demostrado al mismo tiempo que el cuadrado del diámetro de la esfera es doble del cuadrado del lado del octaedro. Q.E.D.

Proposición 15. Construir un cubo inscrito en una esfera como en la pirámide, y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el triple del cuadrado del lado del cubo.

Póngase AB como diámetro de la esfera dada, y córtese por C de tal modo que AC sea doble de CB. Descríbase el semicírculo ADB sobre AB, y dibujar CD desde C formando ángulos rectos con AB, y trazar DB. Póngase el cuadrado EFGH que tenga el lado igual a DB, dibujar EK, FL, GM, y HN desde E, F, G, y H formando ángulos rectos con el plano del cuadrado EFGH, y cortar EK, FL, GM y HN desde EK, FL, GM, y HN respectivamente iguales a una de las líneas rectas EF, FG, GH, o HE. Trazar KL, LM, MN, y NK. [VI 9, I 11, I 46, XI, 12, I 3]. Entonces el cubo FN ha sido construido comprendido por seis cuadrados iguales. [XI Def. 25]. Ahora hay que comprenderlo en la esfera dada, y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es triple del cuadrado del lado del cubo. Trazar KG y EG. Entonces, dado que el ángulo KEG es recto, porque KE es también el ángulo recto del plano EG y por supuesto con la línea recta EG también, entonces el semicírculo descrito en KG pasa a través del punto E. [XI Def. 3]. Puesto que, a su vez GF forma ángulos rectos con cada una de las líneas rectas FL y FE, entonces GF forma también ángulos rectos con el plano FK. Por lo tanto también, si trazamos FK, entonces GF formará ángulos rectos con FK. Por la misma razón el semicírculo descrito sobre GK también pasa a través de F. De manera semejante también pasa por el resto de puntos angulares del cubo. Entonces, si permaneciendo KG fijo, el semicírculo gira alrededor y se devuelve a la misma posición desde la que se empezó a mover, entonces el cubo está comprendido en la esfera. Yo digo además que está comprendido en la esfera dada. Porque, dado que GF es igual a FE, y el ángulo F es recto, entonces el cuadrado de EG es doble del cuadrado de EF. Pero EF es igual a EK, entonces el cuadrado de EG es doble del cuadrado de EK. Por lo tanto la suma de los cuadrados de GE y EK, que es el cuadrado de GK, es triple del cuadrado de EK. [I 47]. Y, dado que AB es triple de BC, mientras AB es a BC como el cuadrado de AB es al cuadrado de BD, entonces el cuadrado de AB es triple del cuadrado de BD. Pero se ha demostrado que el cuadrado de GK es triple del cuadrado de KE. Y KE se ha hecho igual a DB, entonces KG es también igual a AB. Y AB es el diámetro de la esfera dada, entonces KG es también igual al diámetro de la esfera dada. Entonces el cubo ha sido comprendido en la esfera dada y ha sido demostrado al mismo tiempo que el cuadrado del diámetro de la esfera es triple del cuadrado del lado del cubo. Q.E.F.

Proposición 16. Construir un icosaedro contenido en una esfera, como en las figuras anteriores, y demostrar que el lado del icosaedro es la recta sin razón expresable llamada *menor*.

Sea AB el diámetro de la esfera dada, y sea cortado por el punto C de modo que AC sea cuádruple de CB, descríbase el semicírculo ADB en AB, dibujar la línea recta CD desde C formando ángulos rectos con AB, y trazar DB. [VI 9, I 11]. Póngase el círculo EFGHK, y sea el radio igual a DB. Inscríbase el pentágono equilátero y equiangular EFGHK en el círculo EFGHK, biseccionar las circunferencias EF, FG, GH, HK, y KE por los puntos L, M, N, O, y P, y trazar LM, MN, NO, OP, PL, y EP. [IV 11, I 9]. Por lo tanto el pentágono LMNOP es también equilátero, y la línea recta EP pertenece a un decágono. Ahora desde los puntos E, F, G, H, y K levantar las líneas rectas EQ, FR, GS, HT, y KU formando ángulos rectos con el plano del círculo, y sean iguales al radio del círculo EFGHK. Trazar QR, RS, ST, TU, UQ, QL, LR, RM, MS, SN, NT, TO, OU, UP, y PQ. [XI 12, I 3]. Ahora, dado que cada una de las líneas rectas EQ y KU forman ángulos rectos con el mismo plano, entonces EQ es paralela a KU. Pero también es igual a ella, y las líneas rectas trazadas por los extremos en la misma dirección a rectas iguales y paralelas son iguales y paralelas. Entonces QU es igual y paralela a EK. [I 33]. Pero EK pertenece a un pentágono equilátero, entonces QU pertenece también a un pentágono equilátero inscrito en el círculo EFGHK. Por la misma razón cada una de las líneas rectas QR, RS, ST, y TU también pertenecen al pentágono equilátero inscrito en el círculo EFGHK. Entonces el pentágono QRSTU es equilátero. Y, dado que QE pertenece a un hexágono, y EP pertenece a un decágono, y el ángulo QEO es recto, entonces QP pertenece a un pentágono, porque el cuadrado del lado del pentágono es igual a la suma de los cuadrados del lado del hexágono y del cuadrado del lado del decágono inscrito en el mismo círculo. [XIII 10]. Por la misma razón PU es también un lado del pentágono. Pero QU pertenece también a un pentágono, entonces el triángulo QPU es equilátero. Por la misma razón cada uno de los triángulos QLR, RMS, SNT, y TOU es también equilátero. Y, dado que cada una de las líneas rectas QL y QP se ha demostrado que pertenecen a un pentágono, y LP pertenece también a un pentágono, entonces el triángulo QLP es equilátero. Por la misma razón cada uno de los triángulos LRM, MSN, NTO, y OUP son también equiláteros. Tomar el centro V del círculo EFGHK, levantar VZ desde V formando ángulos rectos con el plano del círculo, y prolongarlo en la otra dirección VX. Quitar VW, el lado de un hexágono, y cada una de las líneas rectas VX y WZ, lados de un decágono. Trazar QZ, QW, UZ, EV, LV, LX, y XM. [III 1, XI 12]. Ahora, dado que cada una de las líneas rectas VW y QE forman ángulos rectos con el plano del círculo, entonces VW es paralela a QE. Pero son también iguales, entonces EV y QW son también iguales y paralelas. [XI 6, I 3]. Pero EV pertenece a un hexágono, entonces QW pertenece también a un hexágono. Y, dado que QW pertenece a un hexágono, y WZ a un decágono, y el ángulo QWZ es recto, entonces QZ pertenece a un pentágono. [XIII 10]. Por la misma razón UZ pertenece también a un pentágono, porque si trazamos VK y WU, entonces son iguales y opuestas, y VK, siendo un radio, pertenece a un hexágono, entonces WU pertenece también a un hexágono. Pero WZ pertenece a un decágono, y el ángulo UWZ es recto, entonces UZ pertenece a un pentágono. [IV 15, Cor., XIII 10]. Porque QU pertenece también a un pentágono, entonces el triángulo QUZ es equilátero. Por la misma razón cada uno de los triángulos restantes cuyas bases son las líneas rectas QR, RS, ST y TU, y el punto Z es el vértice, son también equiláteros.

Por lo mismo, dado que VL pertenece a un hexágono, y VX a un decágono, y el ángulo LVX es recto, entonces LX pertenece a un pentágono. [XIII 10]. Por la misma razón, si trazamos MV, que pertenece a un hexágono, MX está también determinado a pertenecer a un pentágono. Pero LM pertenece también a un pentágono, entonces el triángulo LMX es equilátero. De manera similar se puede demostrar que cada uno de los triángulos restantes cuyas bases son MN, NO, OP, y PL y el punto X el vértice, son también equiláteros. Por lo tanto se ha construido un icosaedro comprendido por veinte triángulos equiláteros. [XI Def. 27]. El objetivo siguiente es comprenderlo en una esfera dada y demostrar que el lado del icosaedro es la recta irracional llamada *menor*. Puesto que VW pertenece a un hexágono, y WZ a un decágono, entonces VZ queda cortada en extrema y media razón por W, y VW es el segmento mayor. Entonces como ZV es a VW así VW es a WZ. [XIII 9]. Pero VW es igual a VE, y WZ es igual a VX, entonces ZV es a VE como EV es a VX. Y los ángulos ZVE y EVX son rectos, entonces, si trazamos la línea recta EZ, el ángulo XEZ será recto dado que los triángulos XEZ y VEZ son semejantes. Por la misma razón, dado que ZV es a VW como VW es a WZ, y ZV es igual a XW, y XW es igual a WQ, entonces XW es a WQ como QW es a WZ. Y de nuevo por la misma razón, si trazamos QX, entonces el ángulo de Q será recto, entonces el semicírculo descrito sobre XZ pasará a través de Q. [VI 8, III 31]. Y si, XZ permanece fijo, y se hace girar el semicírculo alrededor y se devuelve a la misma posición desde la que empezó a moverse, entonces pasará a través de Q y de los vértices restantes del icosaedro, y el icosaedro estará comprendido en la esfera. Yo digo además que estará comprendido en la esfera dada. Biseccionar VW por A. [I 9]. Entonces, dado que la línea recta VZ se corta en extrema y media razón por W, y ZW es el segmento menor, entonces el cuadrado de ZW añadido a la mitad del segmento mayor, que es WA, es cinco veces el cuadrado de la mitad del segmento mayor. Entonces el cuadrado de ZA es cinco veces el cuadrado de AW. [XIII 3]. Y ZX es doble de ZA, y VW es doble de AW, entonces el cuadrado de ZX es cinco veces el cuadrado de WV. Y, dado que AC es cuádruple de CB, entonces AB es cinco veces BC. Pero AB es a BC como el cuadrado de AB es al cuadrado de BD, entonces el cuadrado de AB es cinco veces el cuadrado de BD. [VI 8, V Def. 9]. Pero el cuadrado de ZX se ha demostrado que es cinco veces el cuadrado de VW. Y DB es igual a VW, porque cada una de ellas es igual al radio del círculo EFGHK, entonces AB es también igual a XZ. Y AB es el diámetro de la esfera dada, entonces XZ es también igual al diámetro de la esfera dada. Así pues, el icosaedro ha sido contenido en la esfera dada. Yo digo que el lado del icosaedro es la recta irracional llamada *menor*. Dado que el diámetro de la esfera es racional, y el cuadrado de ella es cinco veces el cuadrado del radio del círculo EFGHK, entonces el radio del círculo EFGHK es también racional, de ahí que el diámetro sea también racional. Pero, si un pentágono equilátero se inscribe en un círculo que tiene un diámetro racional, entonces el lado del pentágono es la recta irracional llamada *menor*. [XIII 11]. Y el lado del pentágono EFGHK es el lado del icosaedro. Entonces el lado del icosaedro es la línea recta irracional llamada menor.

COROLARIO

Con esto queda claro que el cuadrado del diámetro de la esfera es cinco veces el cuadrado del radio del círculo a partir del cual el icosaedro ha sido descrito, y que el diámetro de la esfera está compuesto por el lado del hexágono y dos de los lados del decágono inscrito en el mismo círculo. Q.E.F.

Proposición 17. Construir un dodecaedro contenido en una esfera como en las figuras anteriores, y demostrar que el lado del dodecaedro es la recta sin razón expresable llamada *apótoma*.

Sean ABCD y CBEF dos planos del cubo antes mencionado formando ángulos rectos entre sí. Biseccionar los lados AB, BC, CD, DA, EF, EB, y FC por los puntos G, H, K, L, M, N y O respectivamente, y trazar GK, HL, MH, y NO. Cortar las líneas rectas NP, PO y HQ en extrema y media razón por los puntos R, S y T respectivamente, y sean RP, PS y TQ sus segmentos mayores. Levántese RU, SV y TW desde los puntos R,S y T formando ángulos rectos con los planos del cubo hacia la parte exterior del cubo, y háganse iguales a RP, PS y TQ. Trazar UB, BW, WC, CV y VU. [XIII 15, I 10, II 11, VI 30, XI 11, I 3]. Yo digo que el pentágono UBWCV es equilátero, está en un plano, y es equiangular. Trazar RB, SB y VB. Entonces, dado que la línea recta NP se corta en extrema y media razón por R, y RP es el segmento mayor, entonces la suma de los cuadrados de PN y NR es triple del cuadrado de RP. [XIII 4]. Pero PN es igual a NB, y PR es igual a RU, entonces la suma de los cuadrados de BN y NR es triple del cuadrado de RU. Pero el cuadrado de BR es igual a la suma de los cuadrados de BN y NR, entonces el cuadrado de BR es triple del cuadrado de RU. De ahí que la suma de los cuadrados de BR y RU es cuádruple del cuadrado de RU. [I 47]. Pero el cuadrado de BU es igual a la suma de los cuadrados de BR y RU, entonces el cuadrado de BU es cuádruple del cuadrado de RU. Por lo tanto BU es doble de RU. Pero VU es también doble de UR, porque SR es también doble de PR, esto es, de RU, entonces BU es igual a UV. De manera semejante se puede demostrar que cada una de las líneas rectas BW, WC y CV son también iguales a cada una de las líneas rectas BU y UV. Por lo tanto el pentágono BUVCW es equilátero. Yo digo además que está en un plano. Dibujar PX desde P paralela a cada una de las líneas rectas RU y SV y hacia la parte exterior del cubo, y trazar XH y HW. [I 31]. Yo digo que XHW es una línea recta. Dado que HQ se corta en extrema y media razón por T, y QT es el segmento mayor, entonces HQ es a QT como QT es a TH. Pero HQ es igual a HP, y QT es igual a cada una de las líneas rectas TW y PX, entonces HP es a PX como WT es a TH. Y HP es paralela a TW, porque cada una de ellas forma ángulos rectos con el plano BD, y TH es paralela a PX, porque cada una de ellas forma ángulos rectos con el plano BF. [XI 6]. Pero si los dos triángulos XPH y HTW, los cuales tienen dos lados proporcionales el uno del otro, se construyen por un ángulo de modo que sus lados correspondientes sean paralelos, entonces las líneas rectas restantes están en línea recta, por lo tanto XH está en línea recta con HW. [VI 32]. Pero todas las líneas rectas están en un plano, por lo tanto el pentágono UBWCV es un plano. [XI 1]. Yo digo además que también es equiangular. Dado que la línea recta NP se corta en extrema y media razón por R, y PR es el segmento mayor, mientras PR es igual a PS, entonces NS también se corta en extrema y media razón por P, y NP es el segmento mayor. Por lo tanto la suma de los cuadrados de NS y SP es el triple del cualdrado de NP. [XIII 5, XIII 4]. Pero NP es igual a NB, y PS es igual a SV, entonces el cuadrado de NS y SV es triple del cuadrado de NB. De ahí que la suma de los cuadrados de VS, SN y NB sea cuádruple del cuadrado de NB. Pero el cuadrado de SB es igual a la suma de los cuadrados de SN y NB, entonces la suma de los cuadrados de BS y SV, esto es, el cuadrado de BV, en el ángulo VSB es recto, es cuádruple del cuadrado de NB. Por lo tanto VB es doble de BN. Pero BC es también doble de BN, entonces BV es igual a BC. Y, dado que los dos lados BU y UV son iguales a los dos lados BW y WC, y la base BV es igual a la base BC, entonces el ángulo BUV es igual al ángulo BWC. [I 8]. De igual manera podemos demostrar que el ángulo UVC es también igual al ángulo BWC. Por lo tanto los tres ángulos BWC, BUV y UVC son iguales entre sí. Pero si en un pentágono equilátero tres ángulos son iguales entre sí, entonces el pentágono es equiangular, por lo tanto el pentágono BUVCW es equiangular. [XIII 7]. Y se ha demostrado que también es equilátero, por lo tanto el pentágono BUVCW es equilátero y equiangular, y está sobre el lado BC del cubo. Por lo tanto, si hacemos la misma construcción sobre cada uno de los doce lados del cubo, quedará construida una figura sólida contenida por doce pentágonos equiláteros y equiangulares, que se llama dodecaedro. [XI Def. 28]. Se trata ahora de comprenderlo en la esfera dada, y demostrar que el lado del dodecaedro es la línea recta irracional llamada *apótoma*. Se produce XP, y sea la línea recta producida XZ. Entonces PZ encuentra el diámetro del cubo, y se biseccionan uno al otro, porque esto ha sido demostrado en el último teorema del undécimo Libro. [XI 38]. Córtense por el punto Z. Entonces Z es el centro de la esfera que comprende el cubo, y ZP es la mitad del lado del cubo. Trazar UZ. Ahora, dado que la línea recta NS se corta en extrema y media razón por P, y NP es el segmento mayor, entonces la suma de los cuadrados de NS y SP es el triple del cuadrado de NP. [XIII 4]. Pero NS es igual a XZ, porque NP es también igual a PZ, y XP es igual a PS. Pero PS es también igual a XU, porque también es igual a RP. Entonces la suma de los cuadrados de ZX y XU es triple del cuadrado de NP. Pero el cuadrado de UZ es igual a la suma de los cuadrados de ZX y XU, entonces el cuadrado de UZ es triple del cuadrado de NP. Pero el cuadrado del radio de la esfera que comprende el cubo es también el triple del cuadrado de la mitad del lado del cubo, porque previamente se ha mostrado como construir un cubo comprendido en una esfera, y se ha demostrado que el cuadrado del diámetro de la esfera es el triple del cuadrado del lado del cubo. [XIII 15]. Pero, si el todo está tan relacionado con el todo como la mitad con la mitad, y NP es la mitad del lado del cubo, entonces UZ es igual al radio de la esfera que comprende el cubo. Y Z es el centro de la esfera que comprende el cubo, por lo tanto el punto U está en la superfície de la esfera. De igual manera podemos demostrar que cada uno de los ángulos restantes del dodecaedro está en la superfície de la esfera, por lo tanto el dodecaedro ha sido comprendido en la esfera. Yo digo además que el lado del dodecaedro es la línea recta irracional llamada *apótoma*. Dado que, cuando NP es cortada en extrema y media razón, RP es el segmento mayor, y, cuando PO se corta en extrema y media razón, PS es el segmento mayor, entonces, cuando la recta entera NO es cortada en extrema y media razón, RS es el segmento mayor. Así, dado que NP es a PR como PR es a RN, con los dobles también es verdadero, porque las partes tienen el mismo radio que los equimúltiplos, entonces NO es a RS como RS es a la suma de NR y SO. Pero NO es mayor que RS, entonces RS es mayor también que la suma de NR y SO, por lo tanto NO se ha cortado en extrema y media razón, y RS es el segmento mayor. [V 15]. Pero RS es igual a UV, entonces, cuando NO es cortada en extrema y media razón, UV es el segmento mayor. Y, dado que el diámetro de la esfera es racional, y el cuadrado es el triple del cuadrado del lado del cubo, entonces NO, que es el lado del cubo, es racional. Pero si una línea racional se corta en extrema y media razón, cada uno de los segmentos es una recta irracional llamada *apótoma*. Por lo tanto UV, que es un lado del dodecaedro, es una recta irracional llamada *apótoma*. [XIII 6]. Q.E.F.

COROLARIO

A partir de esto queda claro que cuando el lado de un cubo se corta en extrema y media razón, el segmento mayor es el lado del dodecaedro. Q.E.D.

Proposición 18. Colocar los lados de les cinco figuras y compararlos entre sí.

Sea AB el diámetro de la esfera dada, y sea cortado por C de modo que AC sea igual a CB, y por el punto D de modo que sea doble de DB. Descríbase el semicírculo AEB sobre AB, dibujar CE y DF desde C y D formando ángulos rectos con AB, y trazar AF, FB y EB. [I 11]. Después, dado que AD es doble de DB, resulta que AB es triple de BD. En conversión, entonces, BA es una vez y media AD. Pero BA es a AD como el cuadrado de BA es al cuadrado de AF, porque el triángulo AFB es equiangular con el triángulo AFD. Por lo tanto el cuadrado de BA es una vez y medio el cuadrado de AF. [V Def. 9, VI 8]. Pero el cuadrado del diámetro de la esfera es también una vez y medio el cuadrado del lado de la pirámide. Y AB es el diámetro de la esfera, entonces AF es igual al lado de la pirámide. [XIII 13]. De nuevo, dado que AD es doble de DB, entonces AB es triple de BD. Pero AB es a BD como el cuadrado de AB es al cuadrado de BF, entonces el cuadrado de AB es triple del cuadrado de BF. [V Def 9, VI 8]. Pero el cuadrado del diámetro de la esfera es también el triple del cuadrado del lado del cubo. Y AB es el diámetro de la esfera, entonces BF es el lado del cubo. [XIII 15]. Y, dado que AC es igual a CB, entonces AB es doble de BC. Pero AB es a BC como el cuadrado de AB es al cuadrado de BE, entonces el cuadrado de AB es doble del cuadrado de BE. Pero el cuadrado del diámetro de la esfera es también doble del cuadrado del lado del octaedro. Y AB es el diámetro de la esfera dada, entonces BE es el lado del octaedro. [XIII 14]. Seguidamente, dibujar AG desde el punto A formando ángulos rectos con la línea recta AB, construir AG igual a AB, trazar GC, y dibujar HK desde H perpendicular a AB. [I 11, I 3, I 12]. Entonces, dado que GA es doble de AC, porque GA es igual a AB, y GA es a AC como HK es a KC, entonces HK es también doble de KC. Por lo tanto el cuadrado de HK es cuádruple del cuadrado de KC, por lo tanto la suma de los cuadrados de HK y KC, esto es, el cuadrado de HC, es cinco veces el cuadrado de KC. Pero HC es igual a CB, entonces el cuadrado de BC es cinco veces el cuadrado de CK. Y, dado que AB es doble de CB, y, en ellas, AD es doble de DB, entonces la recta restante BD es doble de la recta restante DC. Por lo tanto BC es triple de CD, entonces el cuadrado de BC es nueve veces el cuadrado de CD. Pero el cuadrado de BC es cinco veces el cuadrado de CK, entonces el cuadrado de CK es mayor que el cuadrado de CD. Por lo tanto CK es mayor que CD. Construir CL igual a CK, dibujar LM desde L formando ángulos rectos con AB, y trazar MB. [I 3, I 11]. Ahora, dado que el cuadrado de BC es cinco veces el cuadrado de CK, y AB es doble de BC, y KL es doble de CK, entonces el cuadrado de AB es cinco veces el cuadrado de KL. Pero el cuadrado del diámetro de la esfera es también cinco veces el cuadrado de KL. Pero el cuadrado del diámetro de la esfera es cinco veces el cuadrado del radio del círculo a partir del cual se ha construido el icosaedro. Y AB es el diámetro de la esfera, entonces KL es el radio del círculo a partir del cual se ha construido el icosaedro. Entonces KL es el lado del hexágono en el círculo antes mencionado. [XIII 16, Cor., IV 15, Cor.]. Y, dado que el diámetro de la esfera se hizo con el lado del hexágono y dos de los lados del decágono inscrito en el mismo círculo, y AB es el diámetro de la esfera, siendo KL el lado del hexágono, y AK es igual a LB, entonces cada una de las rectas AK y LB es un lado del decágono inscrito en el círculo a partir del cual se ha descrito el icosaedro. [XIII 16, Cor.]. Y, dado que LB pertenece al decágono, y ML al hexágono, porque ML es igual a KL, y porque también es igual a HK, estando a igual distancia del centro de cada una de las rectas HK y KL es doble de KC, entonces MB pertenece a un pentágono. [XIII 10]. Pero el lado del pentágono es el lado del icosaedro, entonces MB pertenece al icosaedro. [XIII 16]. Ahora bien, dado que FB es un lado del cubo, cortado en extrema y media razón por N, y siendo NB el segmento mayor. Entonces NB es un lado del dodecaedro. [XIII 17, Cor.]. Y, dado que el cuadrado del diámetro de la esfera se ha demostrado que es una vez y medio el cuadrado del lado AF de la pirámide, mientras que es el doble del cuadrado del lado BE del octaedro y triple del cuadrado del lado FB del cubo, entonces, el cuadrado del diámetro de la esfera tiene seis partes, de las que el cuadrado del lado de la pirámide tiene cuatro, el cuadrado del lado del octaedro tres, y el cuadrado del lado del cubo dos. Luego el cuadrado del lado de la pirámide es cuatro tercios del cuadrado del lado del octaedro, y el doble del cuadrado del lado del cubo, y el cuadrado del lado del octaedro es una vez y media el cuadrado del lado del cubo. Los lados nombrados, entonces, de las tres figuras, me refiero a la pirámide, al octaedro y al cubo, lo son en proporciones racionales. Pero los dos restantes, me refiero al lado del icosaedro y al lado del dodecaedro, no guardan proporciones racionales entre sí ni entre los anteriormente nombrados, porque son irracionales, el uno es el *menor* y el otro una *apótoma*. [XIII 16, XIII 17]. Que el lado MB del icosaedro es mayor que el lado NB del dodecaedro lo demostraremos como sigue. Dado que el triángulo FDB es equiangular con el triángulo FAB, proporcionalmente DB es a BF como BF es a BA. [VI 8, VI 4]. Y, dado que las tres rectas son proporcionales, la primera es a la tercera como el cuadrado de la primera es al cuadrado de la segunda, entonces DB es a BA como el cuadrado de DB es al cuadrado de BF. Entonces, por inversión AB es a BD como el cuadrado de FB es al cuadrado de BD. [V Def. 9, VI 20, Cor.]. Pero AB es triple de BD, entonces el cuadrado de FB es el triple del cuadrado de BD. Pero el cuadrado de AD es también cuádruple del cuadrado de DB, porque AD es doble de DB, entonces el cuadrado de AD es mayor que el cuadrado de FB. Por lo tanto AD es mayor que FB. Entonces AL es mucho mayor que FB. Y, cuando AL se corta en extrema y media razón, KL es el segmento mayor, porque LK pertenece al hexágono, y KA al decágono, y, cuando FB se corta en extrema y media razón, NB es el segmento mayor, entonces KL es mayor que NB. [XIII 9]. Pero KL es igual a LM, entonces LM es mayor que NB. Entonces MB, que es el lado del icosaedro, es mucho mayor que NB que es el lado del dodecaedro. Q.E.F.

Digo además, aparte de las cinco figuras nombradas, que no hay otra figura que se pueda construir comprendida por figuras equiláteras y equiangulares. Porque con dos triángulos no se puede construir un ángulo sólido, y menos con planos. Con tres triángulos se construye el ángulo de la pirámide, con cuatro el ángulo del octaedro, y con cinco el ángulo del icosaedro, pero un ángulo sólido no se puede formar con seis triángulos equiláteros y equiangulos colocados todos ellos en un punto, porque si el ángulo del triángulo equilátero es dos terceras partes de un ángulo recto, los seis serán iguales a cuatro ángulos rectos, lo cual es imposible, porque cualquier ángulo sólido está comprendido por menos de cuatro ángulos rectos. [XI 21]. Por la misma razón, tampoco se puede construir un ángulo sólido con más de seis ángulos planos. El ángulo del cubo está contenido por tres cuadrados, porque estar contenido con cuatro es imposible porque de nuevo serían cuatro ángulos rectos. El ángulo del dodecaedro está contenido por tres pentágonos equiláteros y equiangulares, pero por cuatro sería imposible porque, siendo el ángulo del pentágono equilátero un ángulo recto más un quinto, los cuatro ángulos serían mayores que cuatro ángulos rectos, lo cual es imposible. Tampoco se podrá contener un ángulo sólido con otras figuras poligonales por razones absurdas similares. Q.E.D.

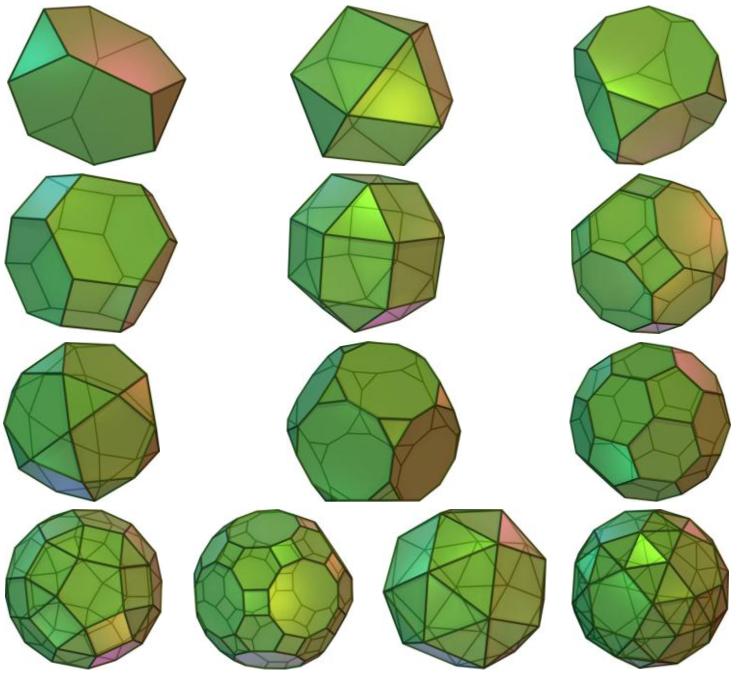
LEMA

Que el ángulo del pentágono equilátero y equiangular es un ángulo recto más un quinto lo demostramos de la siguiente manera.

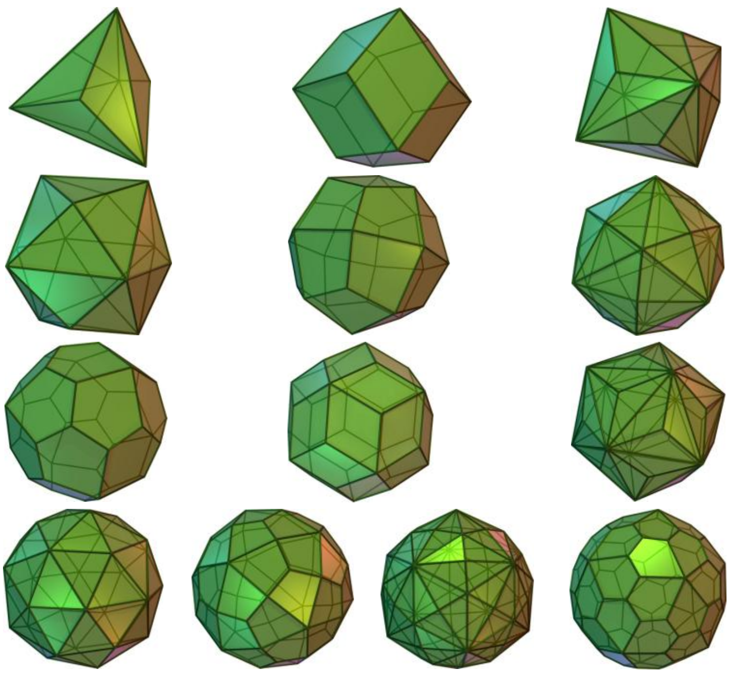
Sea ABCDE un pentágono equilátero y equiangular. Circunscribimos el círculo ABCDE alrededor de él, tomamos el centro F, y trazamos FA, FB, FC, FD y FE. [IV 14]. Entonces biseccionamos los ángulos A, B, C, D y E del pentágono. Y, dado que los ángulos de F son iguales a cuatro ángulos rectos, entonces uno de ellos, como el ángulo AFB, es un ángulo recto menos un quinto. Entonces los ángulos restantes FAB y ABF son un ángulo recto y un quinto. Pero el ángulo FAB es igual al ángulo FBC, entonces el ángulo entero ABC del pentágono es un ángulo recto y un quinto. Q.E.D.

ANEXO II: Imágenes

Los sólidos Arquimedianos (por el orden de la página 14)



Los sólidos de Catalan (por el orden de la página 15)



BIBLIOGRAFÍA

Libros

[Du] Dunham, William *Viaje a través de los genios. Biografías de los grandes matemáticos.* Ed. Pirámide. 1992

[Er] Ernst, Bruno *El espejo mágico de Escher.* Ed. Taschen, 1994

[Es] Escher, M.C. *Grafica e disegni.* Ed. Taschen, 1992

[Eu] Euclides *Elementos*. en http://www.euclides.org/

[Gui] Guillén, Gregoria *Poliedros*. Ed. Síntesis.

[MA] M. Anthony, Joby *In Eves' circles*. Mathematical Association of America. Mayo 1994

[Su] Sutton, Daud *Sólidos Platónicos y Arquimedianos.* Ed. Oniro 2005

Revistas

Investigación y Ciencia.

Temas 1: Grandes Matemáticos. Prensa científica. 1995

Páginas web

http://www.luventicus.org/articulos/03Tr001/index.html

http://www.divulgamat.net/weborriak/TestuakOnLine/02-03/PG02-03-padron.pdf

http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/jamnitzer.html

http://www.mathacademy.com/pr/minitext/escher/index.asp

http://www.pajarita.org/aep/articulos/ARTIC6-3.PDF

http://www.gt.matfun.ull.es/divulgacion/Poliedros1.doc

http://www.wikipedia.org/

En las entradas en español, inglés y en algunos casos portugués de: poliedro, sólido platónico, sólido arquimediano, sólido de Catalan, sólido de Kepler.

http://mathworld.wolfram.com/

También en diversas entradas.