Geometría Analítica II

Lectura 4

Ayudante: Guilmer González

Día 18 de febrero, 2012

El día de hoy veremos:

1. Cónicas, su centro.

1 Cónicas, su centro

Consideremos el problema de describir la forma de la cónica

$$3x^2 + 4xy + 6y^2 - 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y + \frac{2}{7} = 0$$

Obs. La parte lineal nos proporciona información de la posición del centro, la parte cuadrática de su forma, y la constante γ?.

En forma matricial escribimos

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} + 2\mathbf{b}^t\mathbf{x} + \gamma = 0$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix}; \qquad \gamma = \frac{2}{7}$$

La pregunta es: se trata de una cónica, pero cuál? una hipérbola, una elipse, una parábola, un punto, dos rectas? acaso existen puntos que la representen?

Primero encontremos su centro, si lo tiene. Lo que haremos será eliminar el término lineal. Para esto, necesitamos aplicar una traslación a la cónica de un punto $\mathbf{x}$ a $\tilde{\mathbf{x}}$ logrando con esto que la cónica pueda ser escrita en la forma

$$\tilde{\mathbf{x}}^t B\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\gamma} = 0$$

Consideremos la transformación

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$$

si $\mathbf{x}_0$ es el centro de la cónica, esta transformación nos es útil. Veamos lo que debe ser satisfecho para que esto se cumpla.

Bajo esa transformación observemos la cónica

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \mathcal{C}(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{x}}_0) &= \mathbf{x}^t A\mathbf{x} + 2\mathbf{b}^t\mathbf{x} + \gamma = 0 \\
&= (\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_0)^t A(\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_0) + 2\mathbf{b}^t(\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_0) + \frac{2}{7} \\
&= \tilde{\mathbf{x}}^t A\tilde{\mathbf{x}} + 2(\mathbf{x}_0^t A + \mathbf{b}^t)\mathbf{x} + 2\mathbf{b}^t\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0^t A\mathbf{x}_0 + \frac{2}{7} = 0 \\
&= \tilde{\mathbf{x}}^t A\tilde{\mathbf{x}} + 2\mathbf{x}^t(A\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}) + \tilde{\gamma} = 0
\end{aligned}$$

donde

$$\tilde{\gamma} = \mathbf{x}_0^t A\mathbf{x}_0 + 2\mathbf{b}^t\mathbf{x}_0 + \frac{2}{7}$$

Si $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ es una transformación hacia el centro de la cónica, esta representación no debe contener términos lineales, para conseguirlo,

$$\mathbf{x}^t(A\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}) = 0$$

independiente de $\mathbf{x}$ (para todo elemento $\mathbf{x}$ debe ser satisfecha esa relación), por consiguiente el vector $\mathbf{x}_0^t A + \mathbf{b}^t$ debe ser el vector cero, esto se escribe en forma elegante como

$$A\mathbf{x}_0 + \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

lo cual es un sistema lineal de ecuaciones

$$A\mathbf{x}_0 = -\mathbf{b}$$

Hemos llegado a que si $\mathbf{x}_0$ es el centro de la cónica, $\mathbf{x}_0$ es solución del sistema anterior.

Para el ejemplo que nos compete, el sistema es:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Recuerde que para una matriz A de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

su inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es

$$\mathbf{x}_0 = -A^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7}\sqrt{5} \\ \\ -\frac{4}{7}\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Ahora, debemos calcular $\tilde{\gamma}$:

$$\tilde{\gamma} = \mathbf{x}_0^t A\mathbf{x}_0 + 2\mathbf{b}^t\mathbf{x}_0 + \frac{2}{7}$$

No debemos hacer todas las operaciones, si observa $A\mathbf{x}_0 = -b$, y al reemplazar tenemos

$$\tilde{\gamma} = \mathbf{b}^t\mathbf{x}_0 + \frac{2}{7}$$

Realizando las operaciones en la ecuación transformada, logramos

$$\mathcal{C}(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^t A \tilde{\mathbf{x}} - 9 = 0$$

Hasta aquí, hemos obtenido una representación centrada en $\mathbf{x}_0$ de nuestra cónica, pero aun no sabemos la forma que tiene.

Ejercicio(deportivo) Calcule el centro de la cónica,

$$7x^2 - 12xy + 4y^2 + 6x + 4y - 19 = 0$$

2 Cónicas, su forma

Necesitamos transformar esta ecuación en una mejor legible, las cónicas donde A es diagonal nos dan información.

$$\mathcal{C}(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^t D \tilde{\mathbf{x}} + \gamma = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \tilde{x}_i + \gamma = 0$$

Para lograrlo vamos a aplicar una serie de transformaciones lineales simpáticas a A de manera que no alteren la cónica y nos informe de que tipo se trata.

Vamos a resolver el problema que está ligado a esto, y luego interpretemos los resultados para justificar el procedimiento.

Resolvamos el problema

$$A\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$$

este es un sistema de ecuaciones que se escribe en forma homogénea para $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^t$

$$\begin{aligned} (3-\lambda)u_1 + 2u_2 &= 0 \\ 2u_1 + (6-\lambda)u_2 &= 0 \end{aligned}$$

como no estamos interesados en la solución trivial $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, necesitamos que ambas rectas sean paralelas, esto es que se cumpla la condición

$$\frac{3-\lambda}{2} = \frac{2}{6-\lambda}$$

la cual nos lleva a la cuadrática

$$\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$$

resolviendo, tenemos los valores $\lambda_1 = 7; \lambda_2 = 2$. Usemos el más grande primero. Para $\lambda = 7$, tendremos que el sistema $A\mathbf{u}_1 = \lambda \mathbf{u}_1$ se escribe como

$$-4u_{11} + 2u_{12} = 0$$

o bien,

$$2u_{11} - u_{12} = 0$$

una solución para ese sistema sería $\mathbf{u}_1 = (u_{11} = 1, u_{12} = 2)$, si tomamos entre ellos al vector con norma uno, tenemos

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 2$, el sistema $A\mathbf{u}_2 = \lambda \mathbf{u}_2$ se escribe como

$$u_{21} + 2u_{22} = 0$$

una solución es $\mathbf{u}_2 = (u_{21} = -2, u_{22} = 1)$, y de forma general

$$\mathbf{u}_2 = k(u_{21} = -2, u_{22} = 1)$$

Sin embargo, no estamos interesados en cualquier vector, deseamos que su norma sea 1, para esto normalicemos.

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Con los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$, formemos la matriz P

$$P = [\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Esta matriz es muy simpática, y si observamos la operación

$$D = P^t A P = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ésta nos proporciona una matriz con los valores propios de A sobre la diagonal. La transformación $\tilde{\mathbf{x}} = P\hat{\mathbf{x}}$ es la que nos sirve, veamos que

$$\hat{\mathbf{x}}^t P^t A P \hat{\mathbf{x}} + \tilde{\gamma} = \hat{\mathbf{x}}^t D \hat{\mathbf{x}} + \hat{\gamma} = \lambda_1 \hat{\mathbf{x}}^2 + \lambda_2 \hat{\mathbf{y}}^2 + \hat{\gamma} = 0$$

Ahora si, ya podemos decir que se trata de una elipse.

Observe que la tranformación P es tal que P que diagonaliza a A de manera tal que $\det(P) = 1$, esto es

$$P^t A P = D$$

esa es la propiedad de P.

Observación: Si P es ortogonal y $\det(P) = 1$, entonces P es una rotación

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen }\theta \\ \text{sen }\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

`Hacer algunos comentarios`

Para nuestro ejemplo, tenemos que

$$7\hat{x}^2 + 2\hat{y}^2 - 9 = 0$$

es una elipse!