Geometría Analítica II

LECTURA 3

Ayudante: Guilmer González Día 15 de febrero, 2012

El día de hoy veremos: Cálculo de valores propios, vectores propios y algunos resultados.

1 Vectores propios, valores propios

Las matrices con las que trabajaremos a lo largo del curso son simétricas de elementos reales, matrices de dimensión 2 para el caso de cónicas y de dimensión 3 para las cuádricas. Un problema asociado al cambio de sistema de referencia es el cálculo de valores propios y vectores propios.

El problema de valores propios y vectores propios se puede escribir como encontrar u y λ tales que

$$Au = \lambda u \tag{1}$$

gráficamente, se observa que si x es un vector Ax es una transformación de el, reflexión, rotación, elongación, algo; sin embargo $Au = \lambda u$ significa 'alargar' el vector en su misma dirección. Para una matriz simétrica A, nos interesa encontrar u y λ.

Note que si u es un vector propio (una solución a la ecuación (1)), entonces ku, con $k \in \mathbb{R}$ con $k \neq 0$ también lo es. Esto significa que la magintud $\|u\|$ no es representativa del problema. Para fines prácticos nosotros estaremos trabajando con vectores propios unitarios ($\tilde{u} = u/\|u\|$).

Para resolver el problema de valores propios-vectores propios (1), es conveniente escribirlo en la forma matricial

$$(A - \lambda I)u = \mathbf{0} \tag{2}$$

donde I es la matriz identidad (de orden 2 o 3) y darle desde luego un significado geométrico.

Por una parte, si la inversa de $A - \lambda I$ existe, la solución a este problema es el vector cero, cosa que no nos interesa. Las soluciones diferentes de cero se obtienen cuando la matriz $A - \lambda I$ es singular, es decir, cuando su determinante es cero

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{3}$$

por la forma en que está escrito, esto representa a un polinomio de grado 2 (o 3 dependiendo de la dimensión de la matriz), a este polinomio de le conoce como el *polinomio característico* asociado al problema de valores propios.

Ejemplo: Consideremos una matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

calculemos los ceros del polinomio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$$

los valores propios son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 1$. Ahora, para $\lambda_1 = 3$, calculemos su vector propio:

$$Au_1 = 3u_1$$

si $u_1 = (\alpha_1, \beta_1)$, debemos encontrar solución a

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

esto nos lleva a resolver

$$-\alpha - \beta = 0$$

existen muchas soluciones, una línea; una aceptable es: $u = 1/\sqrt{2}(1, -1)$. Un vector de norma 1.

Ahora, para $\lambda_2 = 1$, debemos resolver:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

lo que nos lleva a resolver $\alpha - \beta = 0$. Hay una familia de soluciones, una recta, pero solamente nos interesa un vector de norma 1. Se nos ocurre elegir $u_2 = 1/\sqrt{2}(1, 1)$ (en clase discutimos un poco más al respecto). Observe que los vectores propios son ortogonales.

Algunas propiedades de los valores propios y vectores propios son las siguientes:

1) La suma de los valores propios es la traza de A.

$$\text{traza}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

2) Los valores propios de una matriz simétrica con elementos reales son reales.

3) Los valores propios de una matriz definida positiva son positivos.
Se dice que A es definida positiva, si

$$x^t A x > 0$$

para $x \neq 0$, de donde se obtiene esta propiedad.

4) Los valores propios de una matriz diagonal, son los elementos de la diagonal.

5) Si se tiene una matriz simétrica con vectores propios u y v, cuyos valores propios correspondientes spn λ y μ, con $\lambda \neq \mu$, entonces u y v son ortogonales.

Veamos esta última propiedad que nos será útil. Por una parte

$$(Au)^t v = v^t A u = v^t A^t u = (Av)^t u$$

ahora bien,

$$(Au)^t v = \lambda u^t v$$

y

$$(Av)^t u = \mu v^t u$$

de donde se sigue que

$$\lambda u^t v = \mu v^t u$$

y por consiguiente $(\lambda - \mu)u^t v = 0$ como los valores propios son distinto de cero, los vectores propios son ortogonales. Es decir, si los valores propios son distintos, los vectores propios correspondientes son ortogonales.

Una observación que nos será de gran utilidad es cuando el polinomio característico tiene ceros de multiplidad dos, en este caso cualquier vector en el plano es vector propio y bastará elegir dos que sean ortogonales para... los fines que perseguimos con las cónicas: asignar un sistema de referencia simpático.

De las propiedades anteriores, es fácil ver la siguiente

Propiedad: Cualquier matriz real A simétrica tiene una matriz ortogonal P, tal que

$$P^t A P = D$$

donde D es una matriz diagonal cuyos valores propios de A se encuentran sobre su diagonal.

Que la matriz P sea ortogonal se satisface que $P^t P = I$. Ahora bien, esto nos pide usar la transformación

$$x = P\hat{x}$$

para transformar el problema cuadrático $c(x) = x^t A x + \gamma$ a la forma

$$x^t A x + \gamma = \hat{x}^t P^t A P \hat{x} + \gamma = \hat{x}^t D \hat{x} + \gamma = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \hat{x}_i + \gamma$$

es decir, podremos observar la cuadrática en un sistema de referencia como una suma de cuadrados de ciertas componentes.