Geometría Analítica II

Lectura 6

Ayudante: Guilmer González — Día 15 de marzo, 2007

El día de hoy veremos:

0. Comentarios sobre los trabajos.

1. Recta tangente a una cónica.

1 Recta tangente a una cónica

Una cónica $\mathcal{C}$ está determinada por su cuádrica $c(p)$ en la forma matricial

$$c(p) = \mathbf{p}^t A \mathbf{p} 2b^t p + \gamma = 0 \tag{1}$$

con $A = A^t$. Si $p_0 = (x_0, y_0)$ es un punto digamos, fuera de la cónica (pensemos en una elipse para enfocar la idea), el problema, es determinar el conjunto de rectas tangente a la cónica $\mathcal{C}$.

Este problema es muy simpático, la elipse permite tener una idea de esto. Si el punto está en el interior de la elipse, el problema no tiene solución, ya que cualquier recta que pase por p_0 corta a la cónica en dos puntos. Si el punto se encuentra sobre la cónica, este problema tiene una única solución, y es precisamente la recta tangente. Ahora bien, cómo caracterizar este conjunto de soluciones posibles? Qué condición debe satisfacer la recta para ser tangente a la cónica?

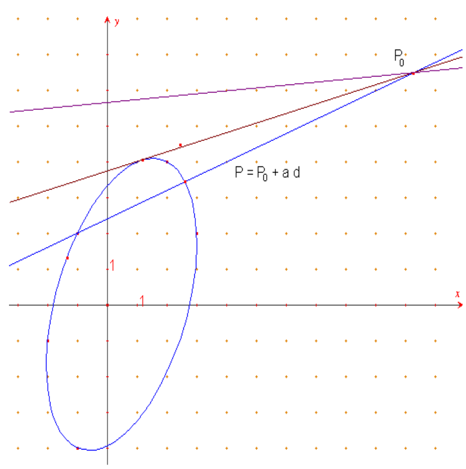

Figura 1: Cortando una la cónica.

Procedamos como hemos venido haciendo a lo largo de los problemas que involucra un problema recta-cónica. Cualquier recta que pase por el punto $p_0 = (x_0, y_0)$ la podemos expresar en su forma parametrizada por

$$\mathcal{L} = \{p = (x, y)|\ \ p = p_0 + td\} \tag{2}$$

donde d es un vector dirección de la recta (recordemos que ese vector no es único, todos son paralelos).

Con esto, el problema es determinar el vector dirección d para el cual la recta $\mathcal{L}$ es tangente a la cónica.

Consideremos los puntos p de la recta $\mathcal{L}$ sobre la cónica, esto es

$$\begin{aligned} p^tAp + 2b^tp + \gamma &= (p_0 + td)^tA(p_0 + td) + 2b^t(p_0 + td) + \gamma \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

desarrollando, esta ecuación es cuadrática en t, tenemos

$$\begin{aligned} p_0 + td)^tA(p_0 + td) + 2b^t(p_0 + td) + \gamma &= p_0^tAp_0 + 2tp_0^tAd + t^2d^tAd + 2b^tp_o + t2b^td + \gamma \\ &= 0 \end{aligned}$$

Agrupando términos

$$t^2d^tAd + t2[p_0^tAd + b^td] + p_0^tAp_0 + 2b^tp_0 + \gamma = 0 \tag{4}$$

la cual, en su lado izquierdo representa polinomio cuadrático en t

$$p(t) = \alpha t^2 + \beta t + \delta$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= d^tAd \\ \beta &= 2(p_0^tAd + b^td) \\ \delta &= p_0^tAp_0 + 2b^tp_0 + \gamma = c(p_0) \end{aligned}$$

la cuadrática $p(t)$ puede tener dos raíces distintas, ninguna, o una solamente; esto dependerá si corta o no al eje de referencia.

Los ceros de $p(t)$, o raíces de la cuadrática, se pueden localizar por medio de

$$t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\delta}}{2\alpha} \tag{5}$$

de donde se tiene que

Condición	Resultado	Interpretación geométrica
$\beta^2 - 4\alpha\delta < 0$	no hay ceros	la recta no corta a la cónica
$\beta^2 - 4\alpha\delta > 0$	hay dos ceros	la recta corta a la cónica en dos puntos
$\beta^2 - 4\alpha\delta = 0$	hay un sólo cero	la recta es tangente a la cónica

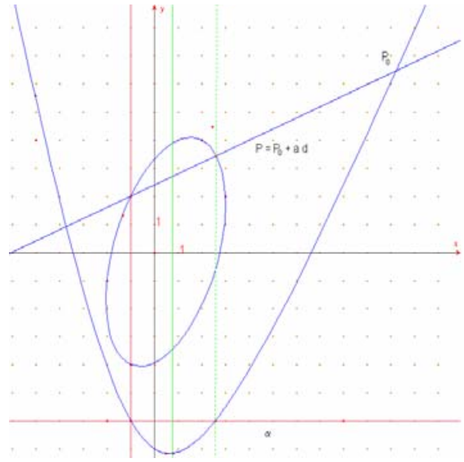

Figura 2: Caso 2: cortamos a la cónica en dos puntos. Se observa la cuadrática asociada al problema.

nos interesa que la recta $\mathcal{L}$ corte a la cónica de forma tangencial, impongamos la condición de que

$$\beta^2 - 4\alpha\delta = 0$$

desarrollando tenemos:

$$\begin{aligned} \beta^2 - 4\alpha\delta &= 4[p_0^t A d + b^t d]^2 - 4(d^t A d)(p_0^t A p_0 + 2b^t p_0 + \gamma) \\ &= 0 \end{aligned}$$

la condición la escribimos como

$$(p_0^t A d + b^t d)^2 - (d^t A d)(p_0^t A p_0 + 2b^t p_0 + \gamma) = 0 \qquad (6)$$

la cual es una condición no lineal en las componentes del vector d, esto nos lleva a tener dos familias de soluciones.

Hagamos un ejemplo. Consideremos nuestra cónica de batalla:

$$4x^2 - 2xy + 2y^2 + 6x - 4y - 10 = 0 \qquad (7)$$

si la graficamos con Maple, tenemos

```
> with(plots):
> implicitplot(4*x^2-2*x*y+2*y^2+6*x-4*y-10=0,x=-5..2,y=-3..4);
```

Se observa que el punto $p_0(1,5)$ no pertenece a la cónica e incluso se encuentra fuera de ella. Usemos este punto.

Desarrollemos la condición (6), para esto, hagamos

$$d = \begin{pmatrix} x_d \\ y_d \end{pmatrix}$$

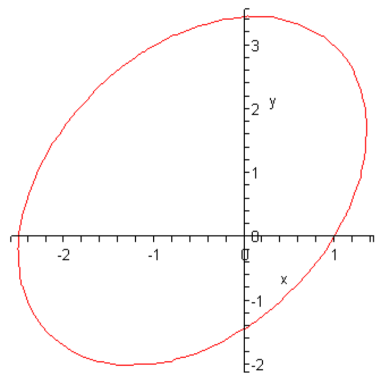

Figura 3: Nuestra cónica de todos los días.

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_d \\ y_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_d \\ y_d \end{pmatrix}\right]^2 -$$

$$\left[\begin{pmatrix} x_d & y_d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_d \\ y_d \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - 10\right] = 0$$

lo cual es una ecuación cudrática para d. Qué puede concluir? Los detalles se vieron en clase.