Geometría Analítica II

Trabajo Final

Profesor: Pablo Barrera — Fecha de entrega: 23 de junio, 2006

Nombre: ______________________________

Resuelva adecuadamente lo siguiente:

1. Describa los siguientes lugares geométricos

   a)
   $$\mathcal{L}_c = \{p \mid d(p, p_0) = d(p, \mathcal{L}_0)\},$$
   donde $p_0 = (0, 0, 2)$ y $\mathcal{L}_0 = \{y = 0, z = 0\}$

   b) Considere dos puntos en el espacio, $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^3$, describa el lugar geométrico
   $$\mathcal{L}_c = \{p \mid d(p, \{p_1, p_2\})\} = r,$$
   para los casos en que

   i) $r < 0.5d(p_1, p_2)$,

   ii) $r = 0.5d(p_1, p_2)$,

   iii) $r > 0.5d(p_1, p_2)$.

   c) Considere los puntos p_1, p_2 y $p_3 \in \mathbb{R}^3$; sea r_c el radio del circuncentro, describa el lugar geométrico
   $$\mathcal{L}_c = \{p \mid d(p, \{p_1, p_2, p_3\}) = r$$
   para los casos en que

   i) $r < r_c$

   ii) $r > r_c$

   d) Sea $\mathcal{F}$ la figura formada por dos segmentos de recta $\overline{p_1 p_2}$ y $\overline{p_2 p_3}$, donde $p_1(-3, 3, 0), p_2(0, 0, 0)$ y $p_3(3, 3, 0)$, describa el lugar geométrico $\mathcal{L}_c$

   i) $\mathcal{L}_c = \{p \mid d(p, \mathcal{F}) = r\}$, donde $r = 1, 2, 3, 4$.

   ii) $\mathcal{L}_c = \{p \mid d(p, p_0) = d(p, \mathcal{F})\}$, para $p_0(0, 2, 0)$.

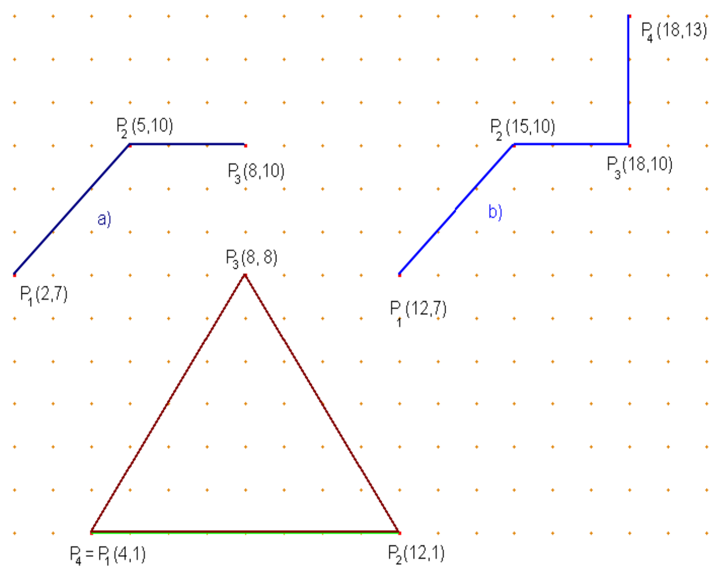
2. Calcule las coordenadas del punto más cercano de la recta al punto p_0 y la distancia, en los siguientes casos:

i) donde $\mathcal{L} = \{x + y + z = 1\} \cap \{z = 0\}$, y $p_0(0, 0, 3)$.

ii) donde $\mathcal{L} = \{x + y + z = 1\} \cap \{x - y = 0\}$, y $p_0(0, 0, 3)$.

iii) donde $\mathcal{L}$ es la recta que une $p_1(1, 1, 0)$, con $p_2(0, 2, 2)$, y $p_0(0, 0, 3)$.

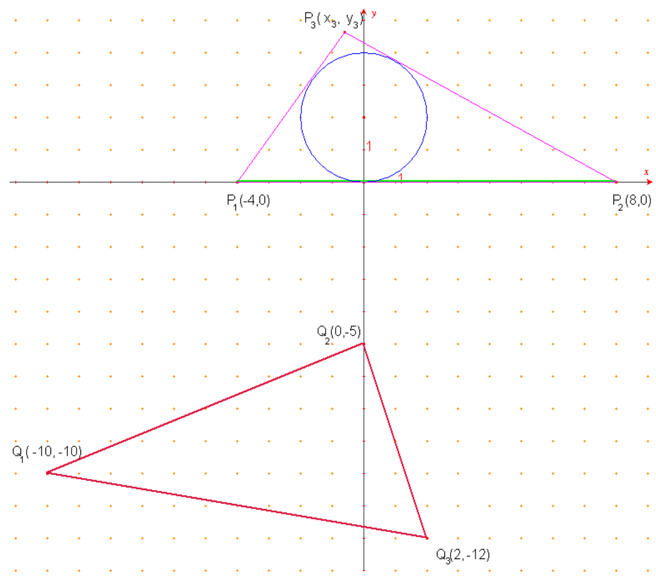
3. Construya las curvas de Bezier asociada a los siguientes polígonos



4. Considere el triángulo representado por $p_1(0, 2)$, $p_2(7, 2)$, y $p_3(4, 6)$, y el triángulo $q_1(0, -3)$, $q_2(6, -6)$ y $q_3(4, 0)$. Encuentre la transformación lineal que manda cada punto p_i en el respectivo q_i.

5. Considere los puntos $P_1(-4, 0)$, $P_2(8, 0)$, y la circunferencia $x^2 + (y - 2)^2 = 4$. Encuentre el punto P_3 de manera que la circunferencia se encuentra inscrita al triángulo $P_1P_2P_3$. Ahora, construya la transformación lineal de esos puntos a $Q_1(-10, -10)$, $Q_2(0, -5)$ y $Q_3(2, -12)$. ¿En qué se transforma el círculo anterior bajo esta transformación?

.



6. Calcule la excentricidad, el centro, y los focos de la cónica

$$20x^2 + 24xy + 27y^2 + 72(x - y + 1) = 0$$

7. Considere los puntos $p_1(0,0)$, $p_2(4,0)$, $p_3(2,3)$ y $p_4(0,2)$. Encuentre la familia de cónicas que pasan por esos puntos. Establezca que condiciones tiene que satisfacer para que la cónica sea una parábola, elipse, hipérbola, o bien, un par de rectas.

8. Encuentre la ecuación de los conos que tienen por vértice el origen y que pasan por las curvas dadas por

   a)
   $$\mathcal{C}_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 20 = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

   b)
   $$\mathcal{C}_2 : \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 2z \\ y + z = 1 \end{cases}$$

9. Demuestre que las siguientes superficies representan conos y calcule sus vértices

a) $2y^2 - 8xy - 4zx - 8zy + 6x - 4y - 2z + 5 = 0$.

b) $2x^2 + 2y^2 + 7z^2 - 10yz - 10zx + 2x + 2y + 26z - 17 = 0$.

10. Encuentre la ecuación de los planos tangentes a

$$2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$$

y que pasa por la línea

$$\begin{cases} x + 9y - 3z = 0 \\ 3x - 3y + 6z - 5 = 0 \end{cases}$$

11. Encuentre las líneas generadoras del hiperboloide

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$$

y que pasen por los puntos

a) $(2, 3, -4)$ y

b) $(2, -1, 4/3)$.

c) Encuentre las familias generadoras λ y μ.

12. Encuentre las direcciones principales de las cónicas

a) $3x^2 + 7y^2 + 3z^2 - 10yz - 2zx + 10xy = \gamma$.

b) $32x^2 + y^2 + z^2 + 6yz - 16zx - 16xy = \gamma$.

c) $(y + z)^2 + (z + x)^2 + (x + y)^2 = \gamma$.

13. Diga cuales cuádricas pueden ser generadas como superficies de revolución y como son sus ecuaciones.

Nota: Argumente adecuadamente su respuesta; no serán tomadas en cuenta observaciones o señalamientos que realicen, sin su debida justificación.