Geometría Analítica II

Tarea-Examen 1

Profesor: Pablo Barrera | Día 07 de abril, 2006

Nombre: ____

Resuelva adecuadamente los siguientes ejercicios.

1. Transforme el cuadrado unitario al sistema coordenado local determinado por $P_0(2,2), P_1(-1,4)$ y $P_2(0,-3)$.

2. Considere un punto $P(x_p, y_p)$ en $\mathbb{R}^2$, y

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$

la ecuación de una elipse. Identifique

$$\mathcal{S}_p := \{(x,y) | \quad x \cdot x_p + 4y \cdot y_p - 4 = 0\}$$

3. Considere el sistema determinado por los puntos $\{P_0(0,1), P_1(1,0), P_2(1,3)\}$ y el sistema $\{Q_0(3,0), Q_1(2,1), Q_2(5,0)\}$, obtenga la transformación entre un sistema y el otro.

4. Considere la transformación $\tilde{p} = Ap$; con

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

muestre como transforma a la curva de Bezier cuyo polígono de control está formado por $(0,0), (1,5), (5,5)$, y $(7,0)$.

5. Considere la recta $y = mx + b$, y un punto $P(x,y)$. Encuentre el simétrico $\tilde{P}(\tilde{x}, \tilde{y})$ de P respecto a esa recta.

6. Transforme la cónica $\mathcal{C}(p) : xy + x + y = 0$, a una suma de cuadrados.

7. Encuentre la familia de cónicas que pasan por $P_0(0,0)$, $P_1(4,0)$, $P_2(2,4)$ y $P_3(0,2)$.

   (a) ¿Cuándo la cónica es una elipse?

(b) ¿Cuándo la cónica es una hipérbola?

(c) ¿Cuándo representa un par de rectas?

(d) ¿Cuándo es una parábola?

8. Muestre que los puntos $A(3,-2,7), B(6,4,-2)$ y $C(5,2,1)$ se encuentran sobre la misma recta.

9. Dados dos puntos $A(x_a, y_a, z_a)$ y $B(x_b, y_b, z_b)$, muestre que el punto de intersección de la recta perpendicular que une a dichos puntos y que parte del origen es

$$\begin{pmatrix} \dfrac{(x_a(y_b^2+z_b^2)+x_b(y_a^2+z_a^2)-(x_a+x_b)(y_ay_b+z_az_b)}{d(A,B)^2} \\ \dfrac{(y_a(x_b^2+z_b^2)+y_b(x_a^2+z_a^2)-(y_a+y_b)(x_ax_b+z_az_b)}{d(A,B)^2} \\ \dfrac{(z_a(x_b^2+y_b^2)+z_b(x_a^2+y_a^2)-(z_a+z_b)(x_ax_b+y_ay_b)}{d(A,B)^2} \end{pmatrix}.$$

10. Encuentre la distancia entre los planos paralelos

$$\Pi_1 : 2x - y + 3z = 4; \qquad \Pi_2 : 2x - y + 3z + 5 = 0$$

11. Describa el lugar geométrico de los puntos que se encuentran a igual distancia del origen al plano $3x + y - 2z = 11$.

12. Encuentre la ecuación del plano que pasa por $(1,3,2)$ y que es perpendicular a los planos
$$\Pi_1 : 2x + 3y - 4z = 2; \qquad \Pi_2 : 4x - 3y - 2z = 5$$

13. ¿Para que valores de k la colección de puntos $A(k,2,-2), B(2,-2,k)$ y $C(-2,1,3)$ son colineales?

14. Encuentre la ecuación del plano que pasa por $(2,-2,0)$ y es perpendicular a la recta formada por $z = 3, y = 2x - 4$.

15. Muestre que la reflexión del punto $A(x_a, y_a, z_a)$ con respecto al plano

$$\lambda x + \mu y + \nu z + \rho = 0,$$

tiene por coordenadas

$$\left(\begin{array}{c} \dfrac{(\mu^2+\nu^2-\lambda^2)x_a - 2\lambda\mu y_a - 2\lambda\nu z_a - 2\lambda\rho}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2} \\ \dfrac{(\lambda^2+\nu^2-\mu^2)x_a - 2\mu\nu y_a - 2\mu\lambda z_a - 2\mu\rho}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2} \\ \dfrac{(\mu^2+\lambda^2-\nu^2)x_a - 2\nu\lambda y_a - 2\nu\mu z_a - 2\nu\rho}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2} \end{array} \right).$$

16. Muestre que el volúmen del tetraedro formado por el origen y los tres puntos $A(x_a, y_a, z_a)$, $B(x_b, y_b, z_b)$ y $C(x_c, y_c, z_c)$ se puede calcular como

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

17. Muestre que el punto $P(-3, 1, -4)$ se encuentra sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 24y + 8z = 0$, y escriba adecuadamente, la ecuación del plano tangente a la esfera en ese punto.

Nota: Argumente adecuadamente su respuesta; no serán tomadas en cuenta observaciones o señalamientos que realicen, sin su debida justificación.