Geometría Analítica II

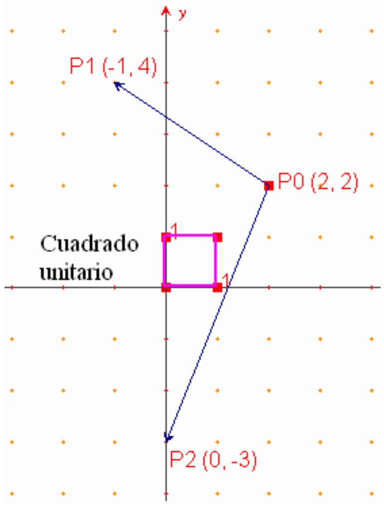
TAREA-EXAMEN 1

Profesor: Pablo Barreara — Día 07 de abril, 2006

NOMBRE: CASTAÑEDA HERNANDEZ RICARDO

Resuelva adecuadamente los siguientes ejercicios.

1.- Transforme el cuadrado unitario al sistema coordenado local determinado por $P_0(2,2)$, $P_1(-1,4)$ y $P_2(0,-3)$.



- Realizamos un sistema de ecuaciones para transformar puntos del sistema ortogonal de ejes "x", "y" a el sistema P, que tiene como origen el punto $P_0(2,2)$.
- Sea un punto P´ de coordenadas (x,y) sobre el sistema ortogonal, en el sistema P se observa este mismo punto como;

$$P_0P = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = P_0O + OP$$

$$= OP - OP_0 = (X,Y) - (2,2) = (X-2, Y-2)$$

$$= \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \alpha P_0P_1 + \beta P_0P_2 = \alpha[OP_1 - OP_0] + \beta[OP_2 - OP_0]$$

$$= \alpha[(-1,4)-(2,2)] + \beta[(0,-3)-(2,2)] = \alpha(-3,2) + \beta(-2,-5)$$

$$= (-3\alpha - 2\beta, 2\alpha - 5\beta)$$

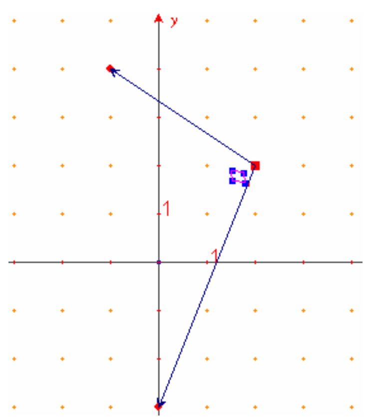
- Por tanto se igualan las dos expresiones obtenidas anteriormente.

$= (-3\alpha - 2\beta, 2\alpha - 5\beta) = (X-2, Y-2)$, por lo tanto $x = -3\alpha - 2\beta + 2$, $y = 2\alpha - 5\beta + 2$, donde al realizar la conversión para despejar a alfa y beta se obtiene;

$\alpha = \dfrac{-5x + 2y + 6}{19}$, $\beta = \dfrac{-2x - 3y + 10}{19}$, por lo que las coordenadas del cuadrado unitario quedan como sigue:

Coordenadas del cuadrado	Punto en sistema ortogonal	Punto en sistema P
Q_0	(0, 0)	(6/19, 10/19)
Q_1	(0, 1)	(8/19, 7/19)
Q_2	(1, 0)	(1/19, 8/19)
Q_3	(1, 1)	(3/19, 5/19)

Por lo que el cuadrado unitario queda como sigue:



2.- Considere un punto P$\left(x_p, y_p\right)$ en P², y; $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, la ecuación de una elipse.

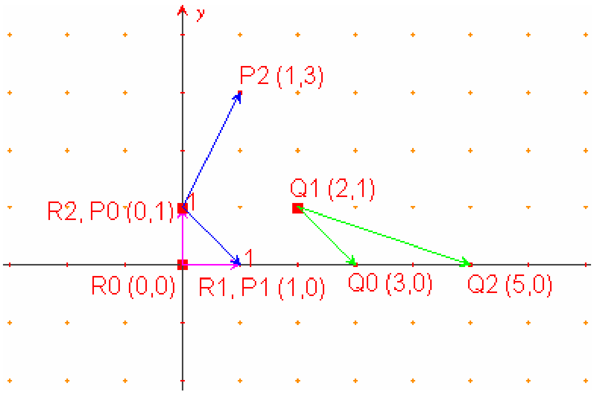
Identifique: $s_p := \{(x,y) \mid x \cdot x_p + 4y \cdot y_p - 4 = 0\}$

- La colección de puntos que cumplen que X.X$_P$+4Y.Y$_P$-4=0, son aquellos tales que se puede crear una formula, como por ejemplo despejando una variable;

$$y = \frac{-x_p.x + 4}{4.y_p}$$

- Por lo que se puede tabular con respecto a "x" y obtener valores para "y".

3.- Considere el sistema determinado por los puntos {P$_0$(0,1), P$_1$(1,0), P$_2$(1,3)} y el sistema {Q$_0$(3,0), Q$_1$(2,1), Q$_2$(5,0)}, obtenga la transformación entre un sistema y el otro.



- Para obtener un sistema que nos proporcione la obtención inmediata de un punto localizado bajo las coordenadas de un sistema P$_0$, P$_1$, P$_2$, hacia un sistema de coordenadas dados por lo puntos Q$_0$, Q$_1$, Q$_2$, nos basaremos en sistema de coordenadas con ejes ortogonales, es decir el formado por los ejes "X", "Y".
- Resolveremos el problema en general dividiéndolo en dos subcasos mas sencillos, de los cuales constan poder pasar de un sistema P o Q, a el sistema ortogonal y viceversa.
- Sea un punto P´ sobre el sistema ortogonal, de coordenadas (x, y), dado que para identificarlo con el sistema P se tiene que realizar los siguientes pasos:

$$\overline{P_0P} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

$$\overline{P_0P} = \overline{P_0O} + \overline{OP}$$

$$= \overline{OP} - \overline{OP_0}$$

$$= (x, y) - (0,1) = (x, y-1)$$

$$\overline{P_0P} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \alpha[\overline{OP_1} - \overline{OP_0}] + \beta[\overline{OP_2} - \overline{OP_0}] = \alpha[(1,0) - (0,1)] + \beta[(1,3) - (0,1)]$$
$$= \alpha[(1,-1)] + \beta[(1,2)] = (\alpha + \beta, -\alpha + 2\beta) = (x, y-1)$$

- Por lo tanto se tienen dos igualdades; (1) $x = \alpha + \beta$, (2) $y = -\alpha + 2\beta + 1$, las cuales representan la forma de encontrar un punto sobre el sistema ortogonal si se introducen los valores de alfa y beta para un punto sobre el sistema coordenado de P, por lo que ahora se resuelve el sistema para despejar a alfa y beta;

(3) $\alpha = \frac{2x - y + 1}{3}$, (4) $\beta = \frac{x + y - 1}{3}$, con estos dos sistemas se puede dar un punto sobre el sistema ortogonal y encontrar las coordenadas de ese mismo visto por el sistema P y viceversa.

- El procedimiento hecho para el sistema P se realiza exactamente para el sistema Q, con lo que se obtiene los siguientes resultados:

$$(5)\, x = \alpha_1 + 3\beta_1 + 2,\ (6)\ y = -\alpha_1 - \beta_1 + 1$$

$$(7)\, \alpha_1 = \frac{-x - 3y + 5}{2},\ (8)\, \beta_1 = \frac{x + y - 3}{2}$$

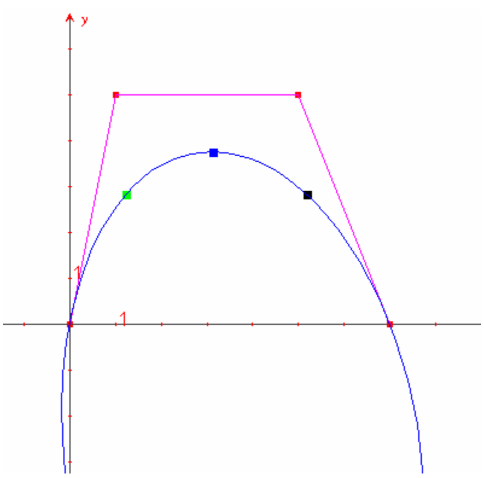
- Para poder encontrar un sistema que nos de la transformación de un punto sobre P hacia coordenadas dadas por Q, utilizamos las ecuaciones (1), (2), que son ecuaciones que nos dan las coordenadas de puntos sobre el sistema ortogonal dando las coordenadas de puntos sobre el sistema P, estas ecuaciones las sustituimos en (7), (8) respectivamente, ya que son ecuaciones que nos arrojan puntos vistos desde el sistema Q, dando puntos sobre el sistema ortogonal, por tanto;

$\beta_1 = \dfrac{3\beta - 2}{2}$, $\alpha_1 = \dfrac{2\alpha - 7\beta + 2}{2}$ Transformación de un punto visto por el sistema P, viéndolo ahora desde el sistema Q

- Para obtener la conversión de un punto sobre el sistema Q visto ahora desde el sistema P, se realiza el mismo procedimiento anteriormente, solo que ahora se sustituyen en (3) y (4) las ecuaciones (5) y (6) respectivamente, por tanto ;

$\alpha = \dfrac{3\alpha_1 + 7\beta_1 + 4}{3}$, $\beta = \dfrac{2\beta_1 + 2}{3}$

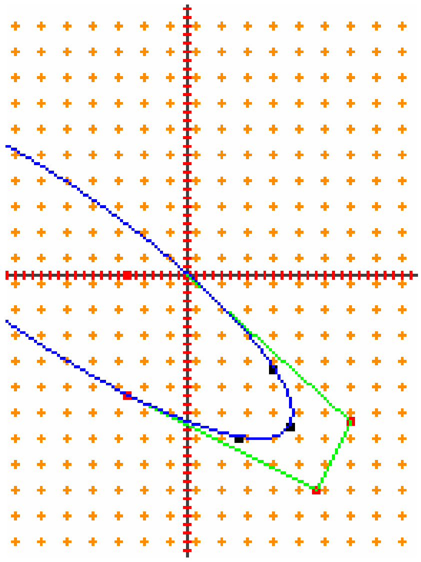
4.- Considere la transformación $\tilde{p} = Ap$; con $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, muestre como transforma a la curva de Bezier cuyo polígono de control esta formado por (0,0), (1,5), (5,5), y (7,0).



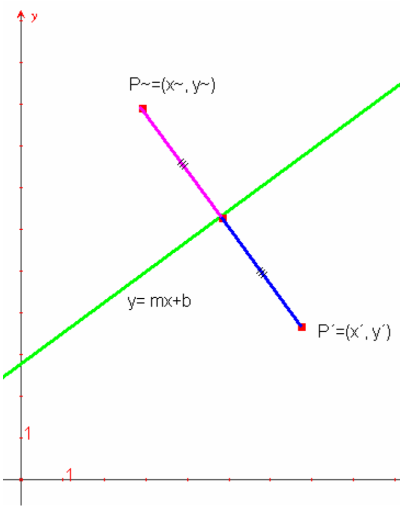
- La curva de Bezier determinada por los punto $P_0(0, 0)$, $P_1(1, 5)$, $P_2(5, 5)$ y $P_3(7, 0)$ que es el polígono de control, se le aplica la transformación de $\tilde{p} = Ap$, lo que significa que se tomara a $\tilde{P}$ como el punto P al que se le aplico la matriz A, con lo cual se obtienen los nuevos puntos:

Puntos	Puntos sin transformación	Puntos con transformación
P_0	(0, 0)	(0, 0)
P_1	(1, 5)	(19, -17)
P_2	(5, 5)	(15, -25)
P_3	(7, 0)	(-7, -14)

- Por lo que la curva de Bezier bajo transformación queda como en la figura siguiente:



5.- Considere la recta $y = mx + b$ y un punto P´(x´, y´). Encuentre el simétrico $\tilde{P}(\tilde{x}, \tilde{y})$ de P respecto a esa recta.



- Para obtener el punto simétrico de P´ trazaremos desde P´ una recta ortogonal a la recta y=mx+b, teniendo estas dos rectas obtendremos el punto de interseccion de las dos rectas, que es el punto P_1,
- Como se tiene la pendiente de la recta y=mx+b, entonces la recta perpendicular tiene pendiente igual -1/m, y debe pasar por el punto P´ de coordenadas (x´, y´), por lo que se tiene la siguiente recta

$$y - y' = \frac{-1}{m}(x - x')$$

$$y = \frac{-x}{m} + \frac{x'}{m} + y'$$

- El punto de interseccion de las dos rectas es:

$$\begin{aligned} y &= \frac{-x}{m} + \frac{x'}{m} + y'(-1) \\ y &= mx + b \end{aligned}, \quad \begin{aligned} y &= mx + b \\ -y &= \frac{x}{m} + \frac{-x'}{m} - y' \end{aligned}, \quad 0 = \frac{m^2+1}{m}x + b - x' - y'$$

$x = \dfrac{mx' + my' - mb}{m^2+1}$, teniendo la coordenada x del punto P_1, se sustituye en la ecuación

y=mx+b, por lo que la coordenada y queda como: $y = \dfrac{m^2x' + m^2y' + b}{m^2+1}$

- Teniendo estos dos puntos podemos definir la recta que pasa por ellos y además debe pasar por el punto simétrico, esta recta se puede definir por vectores, como la forma parametrica de una línea;

$R(t) = OP' + t(OP_1 - OP')$

$R(t) = OP' + tOP_1 - tOP'$, por lo que para localizar el simétrico de P´ vasta como

$R(t) = (1-t)OP' + tOP_1$

colocar un t= 2, por lo tanto:

$$R(2) = -1(x', y') + 2\left(\frac{mx' + my' - mb}{m^2+1}, \frac{m^2x' + m^2y' + b}{m^2+1}\right)$$

$$R(2) = \left(-x' + \frac{2mx' + 2my' - 2mb}{m^2+1}, -y' + \frac{2m^2x' + 2m^2y' + 2b}{m^2+1}\right)$$

$$R(2) = \left(\frac{-m^2x' - x' + 2mx' + 2my' - 2mb}{m^2+1}, \frac{-y' + 2m^2x' + m^2y' + 2b}{m^2+1}\right)$$

Son las coordenadas del punto simétrico de P´.

6.- Transforme la cónica $C(p): xy + x + y = 0$, a una suma de cuadrados.

- Considerando la ecuación de la cónica en su forma matricial, se puede expresar como: $C(p) = p^tAp + 2g^tp + \gamma = 0$, con

$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\gamma = 0$, Proponemos $p = \tilde{p} + p_0$, por lo que se tiene $Ap_0 = -g$

$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$, por lo que se tiene que $\frac{1}{2}x_0 = \frac{-1}{2}$, $\frac{1}{2}y_0 = \frac{-1}{2}$, $x_0 = -1$,

$y_0 = -1$, que son las coordenadas de el centro de la cónica.

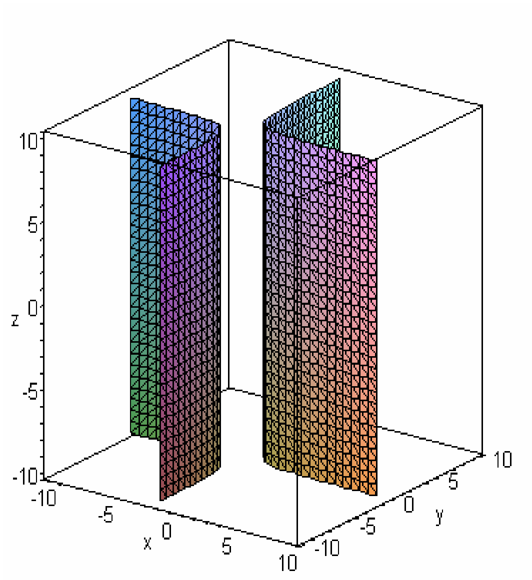
- Para identificar la forma de $C(p)$; diagonalizamos A, para esto resolvemos el problema de los valores propios $A\mu = \lambda\mu$ y por tanto $(A - \lambda \mathrm{I})\mu = 0$, pero no queremos la soluciones fáciles, por tanto pedimos que $\mu \neq 0$, y resolvemos

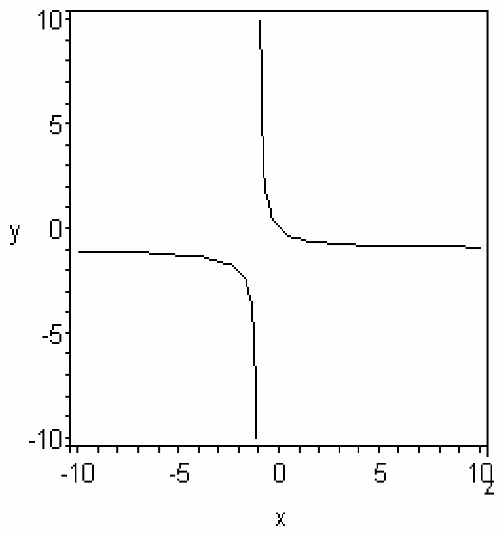
  $(A - \lambda \mathrm{I}) = 0$, entonces $(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$, sacamos el determinante de la

matriz y resulta la siguiente función para lambda: $\lambda^2 - 1/4 = 0$, por lo que las soluciones son $\lambda_1 = 1/2$ y $\lambda_2 = -1/2$

- Consideramos
$$C(\tilde{p}): \tilde{p}^t + A\tilde{p} + \tilde{\gamma}$$
$$C(\tilde{p}): \hat{p}^tB^tAB\hat{p} + \tilde{\gamma}$$
$$C(\tilde{p}): \hat{p}^tD\hat{p} + \hat{\gamma}$$
$$\therefore C(\tilde{p}): \lambda_1\hat{x}^2 + \lambda_2\hat{y}^2 + \hat{\gamma} = 0$$

- Con lo cual que da la ecuación como $1/2\,\hat{x}^2 - 1/2\,\hat{y}^2 + \hat{\gamma} = 0$, que es una hipérbola.

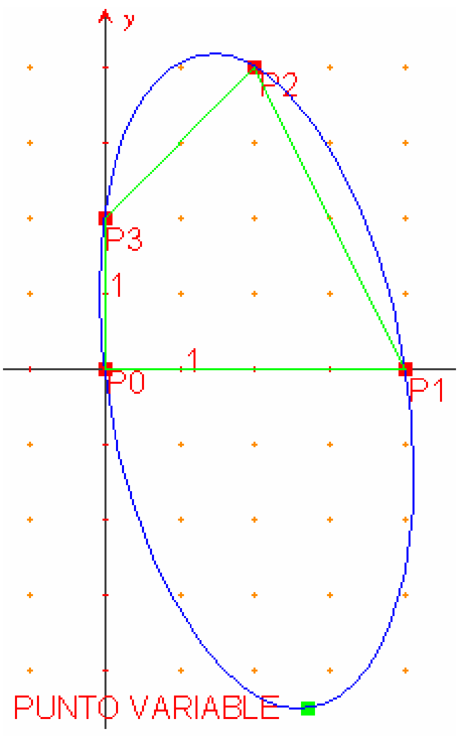


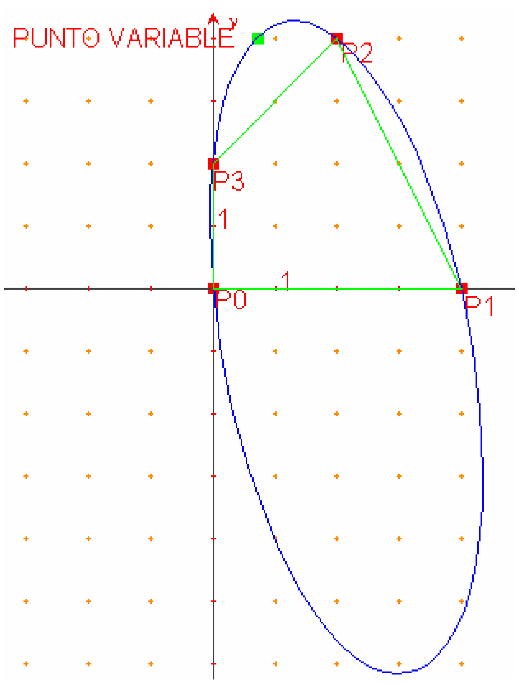


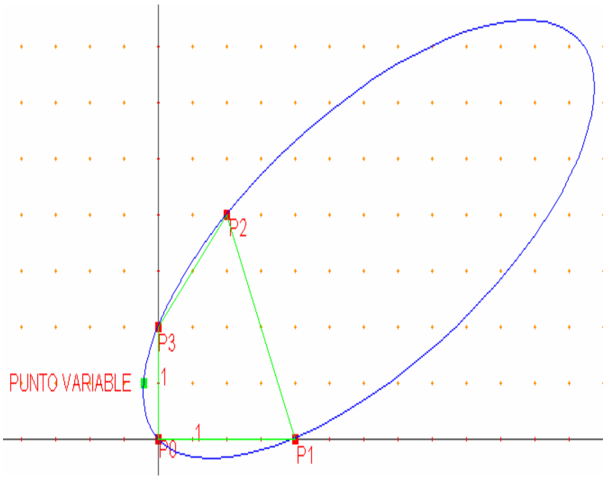
7.- Encuentre la familia de cónicas que pasan por $P_0(0,0)$, $P_1(4,0)$, $P_2(2,4)$ y $P_3(0,2)$.
Ya que para formar una cónica se necesitan 5 puntos, y se tienen 4, entonces el quinto punto será movible.

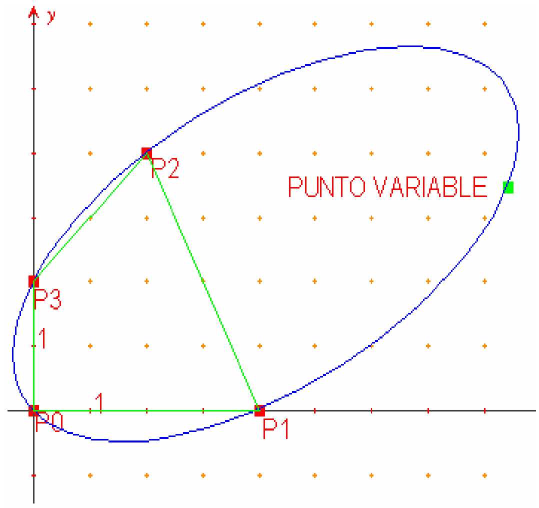
a) ¿Cuándo la cónica es una elipse?

- Cuando el punto P restante se encuentra fuera del polígono formado por los puntos P_0, P_1, P_2, P_3, pero solo en un área no muy alejada de el polígono, ya que la cónica puede abrirse rápidamente y transformarse en una hipérbola, especialmente no cerca de los ejes coordenados ya que es ahí donde la cónica se transforma en un par de rectas.



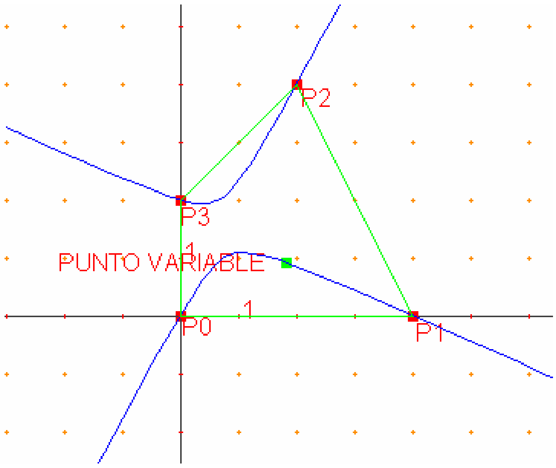


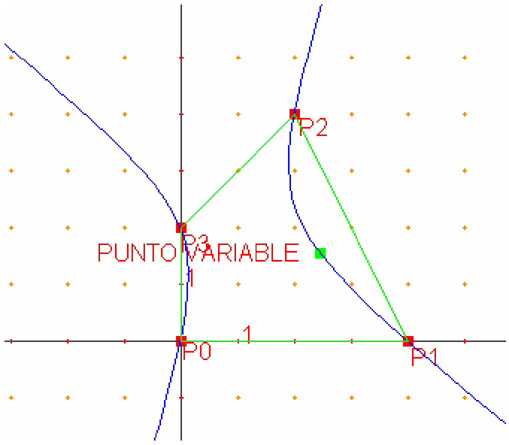


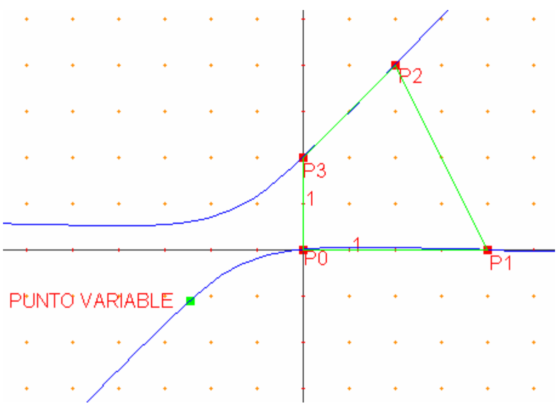


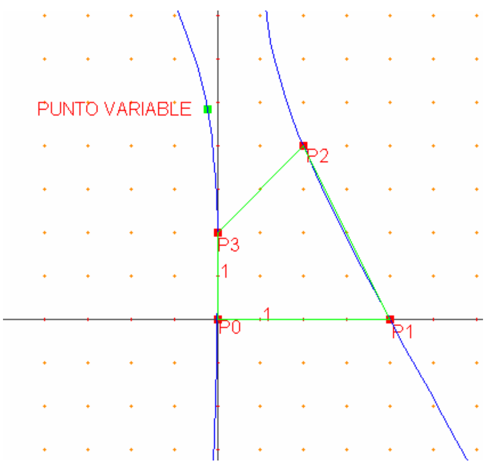
b) ¿Cuándo la cónica es una hipérbola?

- Conforme el punto P se encuentra dentro del polígono determinado por los puntos P_0, P_1, P_2, P_3, la cónica es una hipérbola, ya que se necesita que una línea pase por puntos, de los cuales un esta dentro de los segmentos determinados por los otros y esto solo pasa cuando hay dos líneas que forman a la hipérbola.



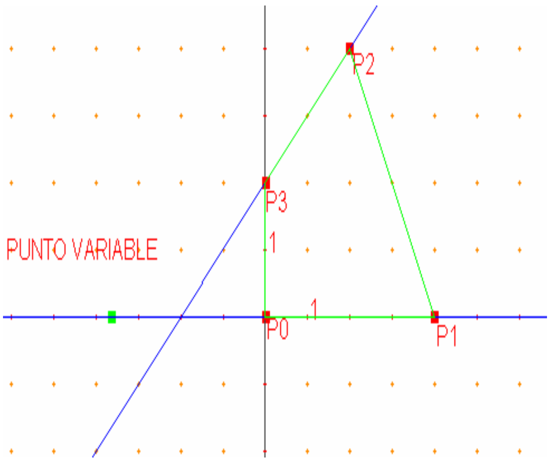


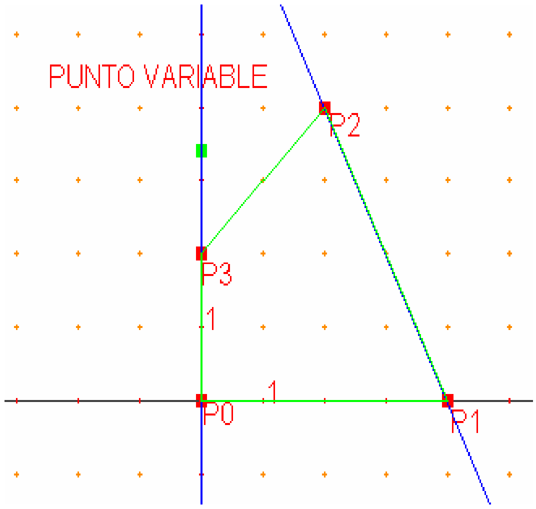


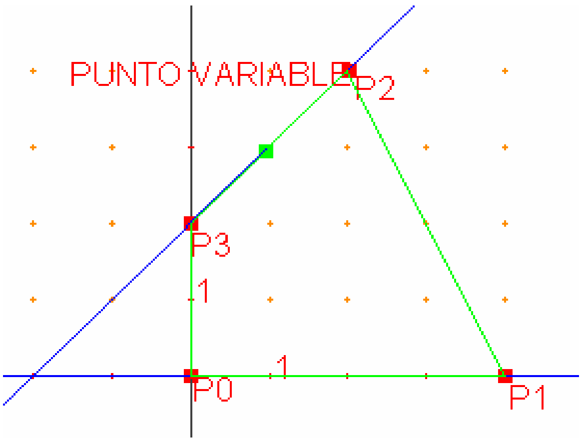


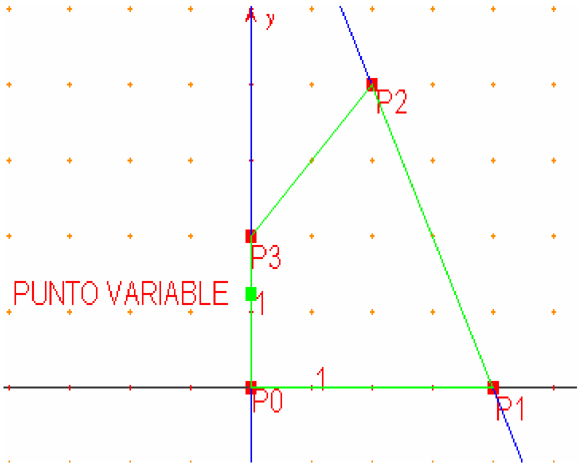
c) ¿Cuándo representa un par de rectas?

- Cuando la cónica se transforma en un par de rectas, es solo por que el punto P se encuentra sobre los segmentos que marcan los puntos P_0, P_1, P_2, P_3, o sobre los ejes coordenados, ya que se tienen puntos colineales y por los cuales se tiene que pasar una línea recta.









8.- Muestre que los puntos A (3,-2,7), B (6, 4,-2) y C (5, 2,1) se encuentran sobre la misma recta.

- Los puntos A, B y C son colineales si y solo si estos tres puntos tienen un área igual a cero, por lo que se realiza el determinante de de estos tres puntos.

$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 84 + 20 - 140 + 12 + 12 = 0$, por lo que se llega a que estos tres puntos son colineales.

10.- Encuentre la distancia entre los planos paralelos

$$\Pi_1 : 2x - y + 3z = 4; \qquad \Pi_2 : 2x - y + 3z + 5 = 0$$

- Ya que los planos son paralelos con todo corte que se haga en el eje "z" entonces podemos elegir un corte, con z= 0, por lo que las ecuaciones quedan de la siguiente forma:

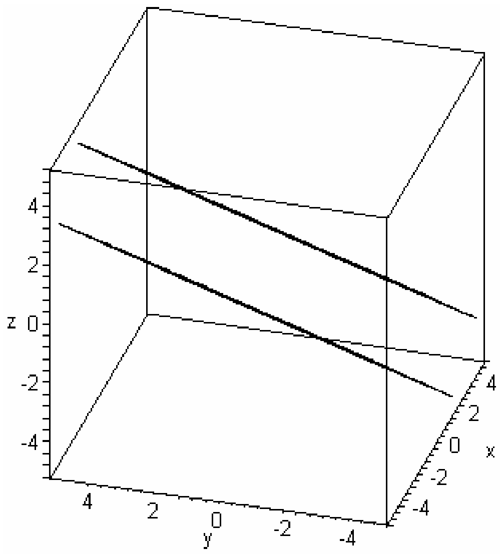
$$\Pi_1' : 2x - y = 4 \qquad \Pi_2' : 2x - y = -5$$

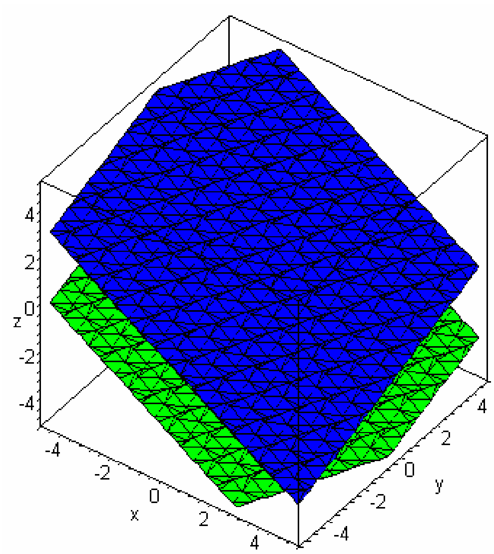
- Elegimos un punto sobre una de las rectas, sea el punto P(1, -2) que se encuentra sobre la recta Π_1', y dicha recta tiene pendiente m= 2, entonces la recta ortogonal a esta, y por tanto a Π_2', tiene pendiente m= -1/2 , como tenemos un punto y pendiente podemos obtener la ecuación de la recta:

$$\Pi^* : y = \frac{-1}{2}x - \frac{3}{2}$$

- Intersectamos las rectas $\Pi^* \cap \Pi_1'$, y el punto resultante es : P´(-13/5, -1/5), por lo que teniendo estos dos puntos, P y P´, usamos la formula de calculo de distancia entre dos puntos, y el resultado de la distancia es: 4.02

Por lo que se descubre que la distancia entre los planos paralelos es 4.02

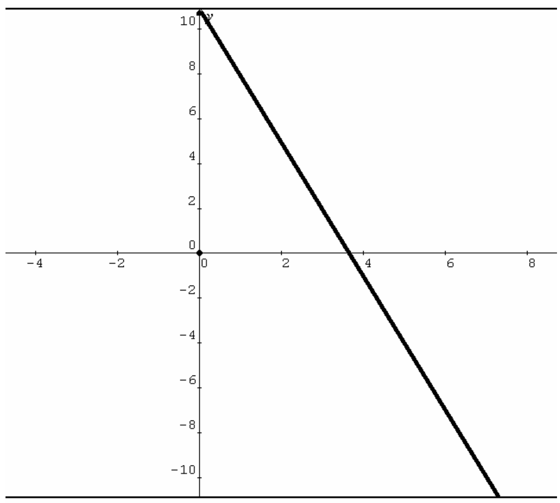




11.- Describa el lugar geométrico de los puntos que se encuentran a igual distancia del origen al plano 3x + y - 2z = 11

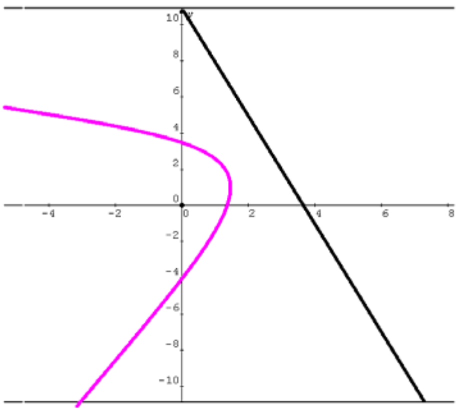
- Podemos cortar la figura que representan el plano y el origen, en planos ortogonales a el plano 3x + y - 2z = 11 y que pasen por el origen, por lo que se tendrían varios planos en los que en cada uno habría siempre un punto y una recta, como por ejemplo:

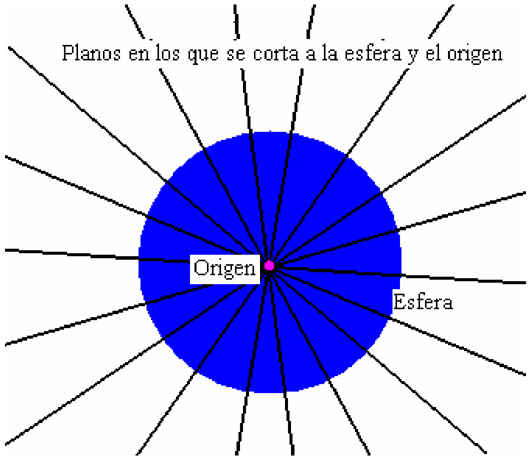
  - Al resolver este subproblema, del problema original, se pueden unir los planos y así obtener le figura que representa el lugar geométrico que están a igual distancia del plano y del origen.

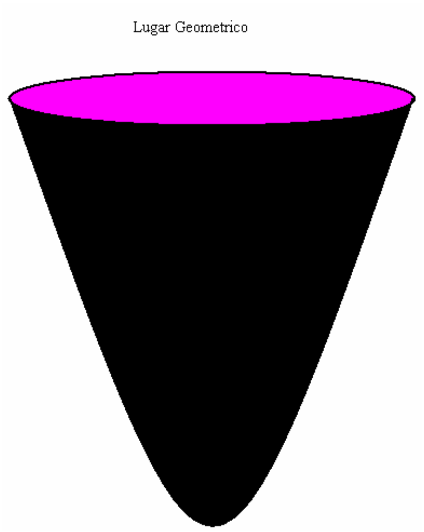


- Los puntos que están a igual distancia de un punto (el origen) y de una recta (parte del plano al realizar el corte) es una parábola.

PUNTOS A IGUAL DISTANCIA DE UN PUNTO Y RECTA







- El lugar geométrico considerado en la figura que se presenta a la izquierda tiene extensión finita, considerando que no se puede representar toda la extensión de la parábola, por lo que solo se tomo una parte de ella.

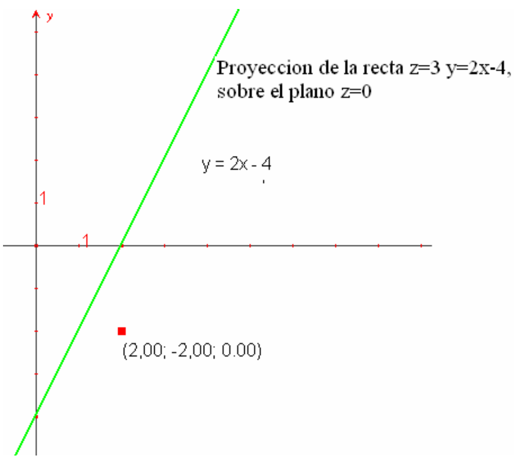
13.- ¿Para que valores de K la colección de puntos A (k, 2,-2), B (2,-2, k) y C (-2, 1,3) son colineales?

- Igual que en el ejercicio 8 se obtiene el determinante de la matriz de el sistema:

$$\begin{vmatrix} k & 2 & -2 \\ 2 & -2 & k \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6k - 4 - 4k + 8 - k^2 - 12$$, como se quiere que estos puntos sean colineales , entonces el determinante de la matriz se iguala a cero y se resuelve la función de k:

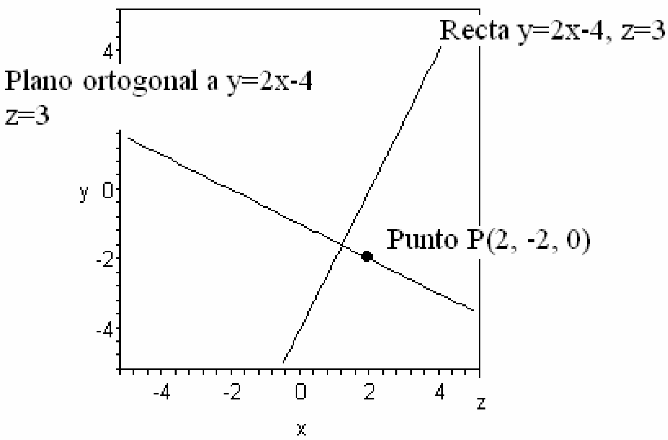
$k^2 + 10k + 8 = 0$, donde las soluciones son $k_1 = \dfrac{-10 + \sqrt{68}}{2}$, $k_2 = \dfrac{-10 - \sqrt{68}}{2}$

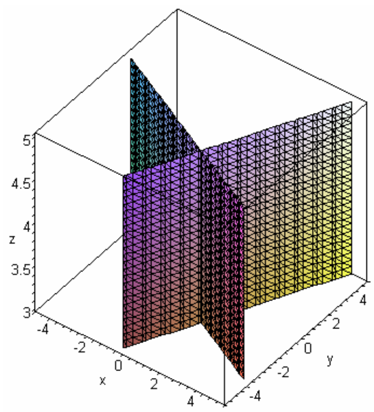
14.-Encuentre la ecuación del plano que pasa por (2,-2,0) y es perpendicular a la recta formada por z =3, y = 2x – 4.



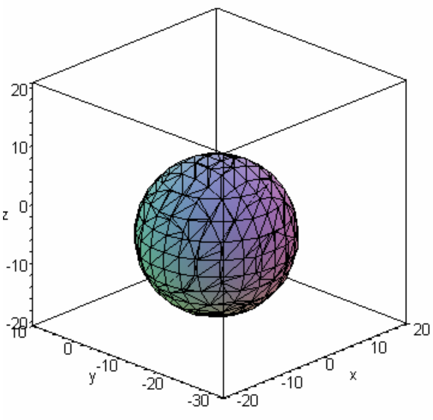
- Considerando que la recta y=2x-4 se encuentra situada sobre el plano z=3, que es paralelo a el plano z= 0, donde esta situado el punto P(2, -2, 0), podemos proyectarla sin ninguna deformación, lo que nos facilita el trabajo de colocar un plano ortogonal a la recta y que además pase por el punto P.
- Determinamos la pendiente de la recta y encontramos la pendiente de una recta ortogonal a este que pase por el punto P.
- La pendiente de la recta que se tiene es m=2, por lo que su ortogonal tiene pendiente m=-1/2, como tenemos el punto P(2, -2 , 0) por el que se quiere que se pase, entonces trazamos una recta con punto y pendiente, la recta encontrada es ;

$$y = \frac{-x-2}{2}$$, Con z variable





17.- Muestre que el punto P (-3, 1,-4) se encuentra sobre la esfera $x^2+y^2+z^z+6x+24y+8z=0$, y escriba adecuadamente, la ecuación del plano tangente a la esfera en este punto.



- Si el punto P satisface la ecuación de la esfera, entonces el punto P se encuentra sobre la esfera:

$$F(-3,1,-4)=(-3)^2+(1)^2+(-4)^2+6(-3)+24(1)+8(-4)=0$$

$=9+1+16-18+24-32=50-50=0$, por lo tanto el punto P esta sobre la esfera.

- Podemos determinar el centro de la esfera, y de esta manera hallar la recta que pasa por el centro y el punto P (-3, 1,-4), para después trazar un plano ortogonal a esta recta que pase por el punto P (-3, 1,-4).

Sea la cónica $x^2+y^2+z^z+6x+24y+8z=0$, para determinar su centro se resuelve el problema $Ap_0=-g$, donde se define que

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ g=\begin{pmatrix}3\\12\\4\end{pmatrix}, \text{ por lo que se tiene que } \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-12\\-4\end{pmatrix}, \text{ donde}$$

resulta lo siguiente:

$x_0=-3$, $y_0=-12$, $z_0=-4$, por lo que las coordenadas del centro de la cónica son P*(-3, -12, -4)

- Como se quiere encontrar un plano que se tangente a la esfera en el punto P(-3,1-4), se debe encontrar puntos Q tales que :

$$PQ\cdot P*P=0$$

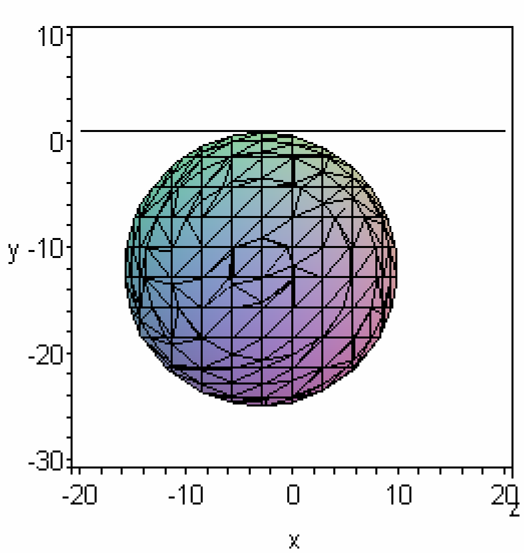
- Con el producto punto de los vectores tiene que ser igual a cero, por lo que se busca que el ángulo entre los vectores sea igual a 90°, se resuelve el problema :

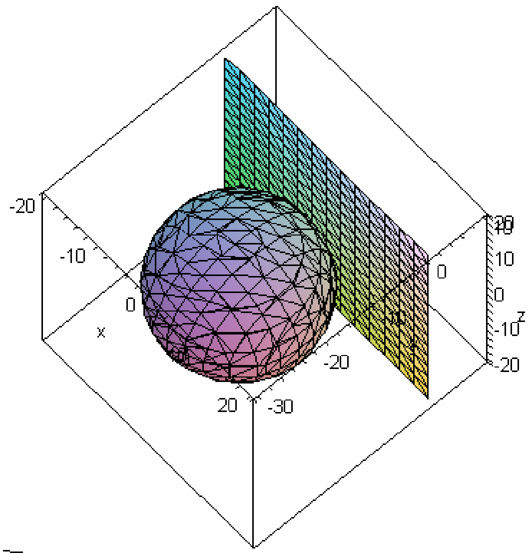
$$\frac{PQ\cdot P*P}{|PQ|\cdot|P*P|}=0$$

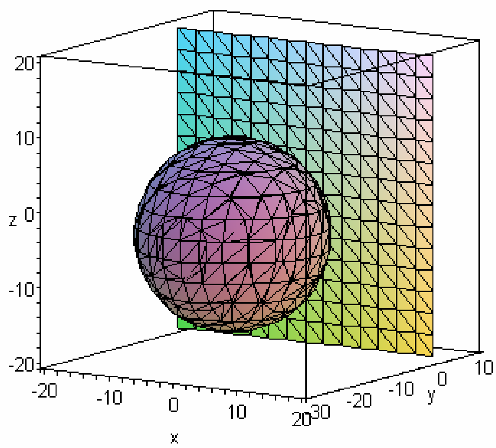
$P*P$=(0, 13, 0), PQ=(-x-3, -y+1, -z-4)

$$\frac{[(0)(-x-3)+(13)(-y+1)+(0)(-z-4)]}{\sqrt{(0)^2+(13)^2+(0)^2}+\sqrt{(-x-3)^2+(-y+1)^2+(-z-4)^2}}=0$$

- Como el cociente debe ser igual a cero entonces $-13y+13=0$, por lo que y= 1, lo que nos dice que todo punto sobre el plano y=1 será un punto Q, lo cual nos lleva también a que el plano tangente a la esfera en el punto P(-3, 1, -4) es el plano y= 1







Nota: Argumente adecuadamente su respuesta; no serán tomadas en cuenta observaciones o señalamientos que realicen, sin su debida justificación.