Geometría Analítica II

Tarea - Examen 1

Prof. Pablo barrera   Alumno: Ernesto Velasco   Grupo: 4078

1.-Transforme el cuadrado unitario al sistema coordenado local determinado por $P_0\,(2,2)$, $P_1\,(-1,4)$ y $P_2\,(0,-3)$.

Para encontrar la transformación del cuadrado unitario lo primero es encontrar la matriz A por la cual está dada la transformación de los P_i respecto al sistema coordenado representado por los vectores $Q_0\,(0,0)$, $Q_1\,(0,1)$ y $Q_2\,(1,0)$, con lo que se forman las igualdades entre cada pareja de puntos:

$$\begin{array}{c} P_0 = AQ_0 + b \\ P_1 = AQ_1 + b \\ P_2 = AQ_2 + b \end{array} \quad \text{que implica} \quad \begin{array}{c} P_0 = A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \\ P_1 = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \\ P_2 = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \end{array} \quad \text{con lo que} \quad \begin{array}{c} P_0 = b \\ V_1 = P_1 - b \\ V_2 = P_2 - b \end{array}$$

que al hacer las sustituciones y resolver se tiene $b\,(2,2)$, $V_2\,(-3,2)$ y $V_1\,(-2,-5)$ con lo cual la transformación $P = AQ + b$ está dada por

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_q \\ x_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

con lo que al sustituir las coordenadas de los vértices del cuadrado unitario en la transformación se obtienen los puntos equivalentes $T_0\,(2,2)$, $T_1\,(-1,4)$, $T_2\,(0,-3)$ y $T_3\,(-3,-1)$, en la imagen 1, se puede ver ambos tanto el cuadrado unitario como su transformación , donde se muestra que el cuadrado unitario se transforma en un paralelogramo.

2.- Considere el punto $P_0\,(x_p, y_p)$ en $\mathbb{R}^2$, y $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ la ecuación de una elipse. Identifique $\mathcal{S}_p := \{(x,y) \mid x \cdot x_p + 4y \cdot y_p - 4 = 0\}$.

La primera consideración que se debe hacer al resolver este problema es escribir la ecuación de la elipse en la forma general de la ecuación de segundo grado con lo que $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ se puede ver como $x^2 + y^2 - 4 = 0$ ahora bien esto se puede expresar en forma matricial como:

$$\mathcal{C}\,(p) \,:\, \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 4 = 0$$

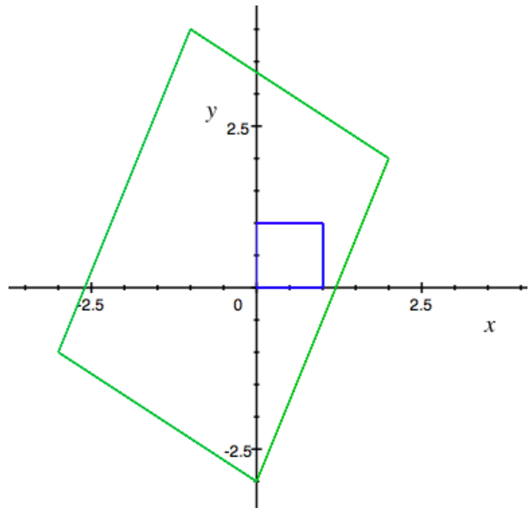

Figura 1: El cuadrado unitario y su transformación respecto al las coordenadas de $P_0\,(2,2)$, $P_1\,(-1,4)$ y $P_2\,(0,-3)$.

que en su forma bilineal es

$$\mathcal{B}\,(p,q)\ :\ \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_q \\ y_q \end{pmatrix} - 4 = 0$$

si se sustituye P_0 en la forma bilineal de la cónica, se obtiene lo siguiente:

$$\mathcal{B}\,(p,P_0)\ :\ \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} - 4 = 0$$

que al desarrollar el producto matricial define la ecuación cartesiana $\mathcal{B}\,(p,P_0)\ :\ x\cdot x_p + y\cdot y_p - 4 = 0$ que es la ecuación de una recta, ya que x_p y y_p son constantes, pero al ser la recta asociada a la forma bilineal de la cónica en el punto p_0, es a su vez la polar asociada a P_0 respecto a la cónica, y además se observa que es la misma ecuación que debe satisfacer cada uno de los puntos en el conjunto $\mathcal{S}_p$ por lo cual se puede afirmar que el conjunto $\mathcal{S}_p := \{(x,y)\ |\ x\cdot x_p + 4y\cdot y_p - 4 = 0\}$ es la recta polar asociada al punto $P_0\,(x_p,y_p)$.

3.- Considere el sistema determinado por los puntos $\{P_0\,(0,1)\,,P_1\,(1,0)\,,P_2\,(1,3)\}$ y el sistema $\{Q_0\,(3,0)\,,Q_1\,(2,1)\,,Q_2\,(5,0)\}$, obtenga la transformación entre un sistema y el otro.

Para resolver este problema es necesario resolver las siguientes igualdades

$$\begin{array}{lcl} P_0 = AQ_0 + b & & Q_0 = BP_0 + c \\ P_1 = AQ_1 + b & \text{y analogamente} & Q_1 = BP_1 + c \\ P_2 = AQ_2 + b & & Q_1 = BP_1 + c \end{array}$$

asignando variables a los elementos de las matrices A y B así como a los vectores b y c se tiene

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} Q + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \text{y respectivamente} \quad Q = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} P + \begin{pmatrix} w_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

lo que al sustituir los valores de cada uno de los puntos dados, nos lleva a los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\begin{array}{c} 3x_1 + x_3 = 0 \\ 3y_1 + y_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ 5x_1 + x_3 = 1 \\ 5y_1 + y_3 = 0 \end{array} \quad \text{y respectivamente} \quad \begin{array}{c} w_2 + w_3 = 3 \\ z_2 + z_3 = 0 \\ w_1 + w_3 = 2 \\ z_1 + z_3 = 1 \\ w_1 + 3w_3 + w_3 = 5 \\ z_1 + 3z_2 + z_3 = 0 \end{array}$$

que al resolver se obtienen valores para cada una de las variables, por lo cual se tiene $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $y_1 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = 0$ y $y_3 = \frac{1}{2}$, en el caso de la transformación $P = AQ + b$ y valores de $w_1 = 2$, $w_2 = 3$, $w_3 = 0$, $z_1 = -0$, $z_2 = -\frac{1}{3}$ y $z_3 = \frac{1}{3}$ para $Q = BP + c$ con lo que las dos transformaciones se puede afirmar estarán dadas por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} Q + \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{y en el otro caso} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} P + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

4.- Considere la transformacion $\tilde{p} = Ap$; con

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

muestre como transforma a la curva de Bezier cuyo polígono de control está formado por $(0,0)$, $(1,5)$, $(5,5)$ y $(7,0)$.

En primer lugar se debe observar la curva de Bezier junto con su polígono de control respecto del sitema coordenado original, en la imagen 2 se puede ver ambos ahora bien, ya que el

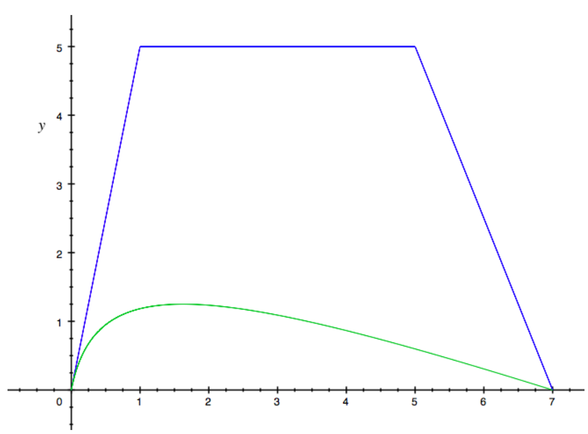

Figura 2: La curva de Bezier y su polígono de control respecto al sistema coordenado original

polígono de control esta formado por el conjunto de puntos $p_0\,(0,0)$, $p_1\,(1,5)$, $p_2\,(5,5)$ y

$p_3\,(7,0)$, es necesario aplicar la transformación $\tilde{p} = Ap$ a cada uno de los puntos por lo que para cada uno de los vértices que conforman el polígono de control se tiene:

$$\tilde{p}_0 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \tilde{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

realizando los cálculos se obtienen que los puntos transformados de cada uno de los vértices del polígono de control que son $\tilde{p}_0 = (0,0)$, $\tilde{p}_1 = (19,-17)$, $\tilde{p}_2 = (15,-25)$ y $\tilde{p}_3 = (-7,-14)$, el resultado de la transformación se puede observar en la imagen 3, que se puede ver aparentemente fue rotada, respecto a la curva de Bezier original.

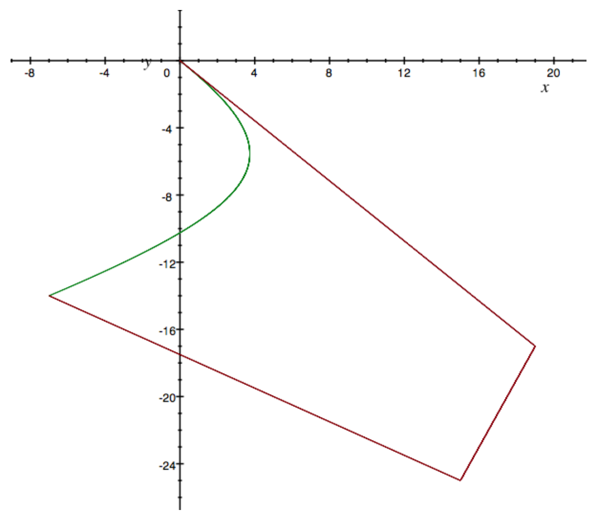

Figura 3: La curva de Bezier y su polígono de control respecto a la transformación $\tilde{p} = AP$

5.- Considere la recta $\ell_1 : y = mx + b$ y un punto $P\,(x_0, y_0)$, encuentre el simétrico $\tilde{P}\,(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ de P respecto a esa recta.

Ya que el simétrico de P respecto a la recta ℓ_1 es aquel que se encuentra a la misma distancia que P de la recta, este debe encontrarse sobre la recta perpendicular a $y = mx + b$ que pasa por P por lo que dicha recta se define como $\ell_2 : y - y_0 = \frac{1}{m}\,(x - x_0)$ si se toma el punto de intersección de está recta con la que determina el eje de simetría se tiene que se debe resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{c} y + \frac{x}{m} = \frac{x_0}{m} + y_0 \\ y - mx = b \end{array}$$

con lo que se obtiene el punto sobre la recta ℓ_1

$$q_0 = \begin{pmatrix} \frac{y_0 m - mb + x_0}{1+m^2} \\ \\ \frac{y_0 m^2 + m x_0 + b}{1+m^2} \end{pmatrix}$$

Ahora bien si se toma una circunferencia con centro en dicho punto y radio igual a $d\left(P,q_0\right)$ se trendrá la ecuacioón cartesiana de circunferencia $\mathcal{C}_1 : \left(x - \frac{y_0m+x_0-mb}{1+m^2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_0m^2+mx_0+b}{1+m^2}\right)^2 = \left(x_0 - \frac{y_0m+x_0-mb}{1+m^2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{y_0m^2+mx_0+b}{1+m^2}\right)^2$ ahora solo se deben encontrar los cortes de sta circunferencia con la recta ℓ_2 uno obviamente es P y el otro debe ser el simétrico de P, resolviendo el sistema

$$\begin{array}{c} y + \frac{x}{m} = \frac{x_0}{m} + y_0 \\ \left(x - \frac{y_0m+x_0-mb}{1+m^2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_0m^2+mx_0+b}{1+m^2}\right)^2 = \left(x_0 - \frac{y_0m+x_0-mb}{1+m^2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{y_0m^2+mx_0+b}{1+m^2}\right)^2 \end{array}$$

se tiene que el otro punto de corte tiene coordenadas $\left(2\frac{y_0m-mb+x_0}{1+m^2} - x_0, 2\frac{y_0m^2+mx_0+b}{1+m^2} - y_0\right)$

6.- Transforme la cónica $\mathcal{C}\left(p\right) : xy + x + y = 0$, a una suma de cuadrados.

Para transformar la cónica $\mathcal{C}\left(p\right) : xy + x + y = 0$ a una suma de cuadrados inicialmente se debe eliminar el termino lineal de la ecuación para ello primeramente se debe escribir la cónica en su forma matricial de tal manera que

$$\mathcal{C}\left(p\right) : \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

ahora para eliminar el termino lineal de la ecuación es necesario trasladar la cónica a su centro, para ello se propone el cambio de coordenadas $p = \tilde{p} - p_0$ que al al realizar el cambio de coordenadas se tiene $\mathcal{C}\left(p\right) : \left(\tilde{p} - p_0\right)^t A \left(\tilde{p} - p_0\right) + 2g^t\left(\tilde{p} - p_0\right) = 0$ que al desarrollar implica $\tilde{p}^tA\tilde{p} - 2p_0^tA\tilde{p} + p_0^tAp_0 + 2g^t\tilde{p} - 2g^tp_0 = 0$ que al factorizar términos comunes a $\tilde{p}$ se tiene $\tilde{p}^tA\tilde{p} - 2\left(p_0^tA - g^t\right)\tilde{p} + p_0^tAp_0 - 2g^tp_0 = 0$, ahora bien para eliminar el temino lineal de la ecuació se debe cumplir que $p_0^tA - g^t =$ con lo que $Ap_0 - g = 0$ por lo que $Ap_0 = g$, con lo cual se debe resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

con lo que al resolver se obtiene $p_0 = (1,1)$ que al sustituir y evaluar, se tiene $\mathcal{C}\left(\tilde{p}\right) : \tilde{p}^tA\tilde{p} - 1 = 0$ ahora es necesario diagonalizar la matriz A, para ello se debe resolver el problema $Au = \lambda u$ que lleva a resolver el polinomio característico $\lambda^2 - \frac{1}{4} = 0$ con lo que $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ con lo que se deben resolver los sistemas de ecuaciones

$$\begin{array}{c} \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}y \end{array} \text{ y } \begin{array}{c} \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}y \end{array}$$

ya que no importa la solución trivial se toman dos vectores $P_1\left(1,1\right)$ y $P_2\left(-1,1\right)$ que al normalizarlos se tienen los vectores $V_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $V_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ con los que se conforma la matriz B que es

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ por lo que se tiene } B^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

realizando el cambio de coordenada $\tilde{p} = B\hat{p}$ se tiene $\mathcal{C}(\tilde{p}) : (B\hat{p})^t A (B\hat{p}) - 1 = 0$ que al desarrollar se tiene $\hat{p}^t B^t A B \hat{p} - 1 = 0$ si se hace $D = B^t A B$ y se desarrolla el producto matricial se puede observar que D es diagonal y se observa que

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

por lo que desarrollar $\hat{p}^t D \hat{p} - 1 = 0$ se tiene $\frac{1}{2}\hat{x}^2 - \frac{1}{2}\hat{y}^2 - 1 = 0$ por lo que finalemente expresada como una suma de cuadrados se tiene que $\mathcal{C}(\hat{p}) : \frac{1}{2}\hat{x}^2 - \frac{1}{2}\hat{y}^2 = 1$.

7.- Encuentre la familia de cónicas que pasan por $P_0(0,0)$, $P_1(4,0)$, $P_2(2,4)$, $P_3(0,2)$.

La familia de cónicas que pasan por el conjunto de puntos $P_0(0,0)$, $P_1(4,0)$, $P_2(2,4)$, $P_3(0,2)$, es aquella que corta cuatro veces a los ejes coordenados y cuya construcción de las polares esta dada por la estructura que se muestra en la imagen 4

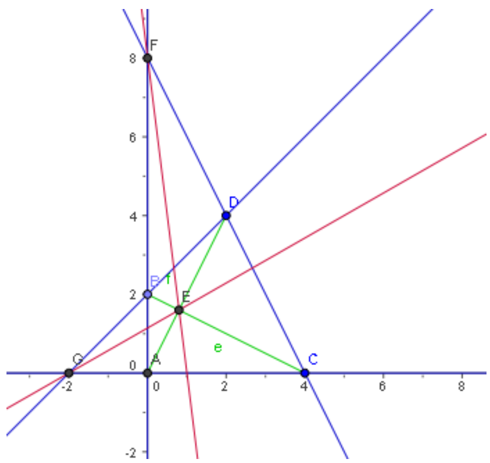

Figura 4: La construcción que da las polares de todas las cónicas de la familia

a) ¿Cuándo la cónica es una elipse?

Siempre que el quinto punto que la defina se encuentre entre las rectas azules que se muestran en la imagen 4, pero solo entre una de esas regiones.

b) ¿Cuándo la cónica es una hipérbola?

Cuando el quinto punto que termina de definir la cónica se salga de cualquiera de las dos regines mencionadas anteriormente, o en la intersección de las mismas.

c) ¿Cuándo representa un par de rectas?

Será un par de rectas siempre que el quinto punto que determina por completo la cónica sea colineal con cuales quiera otros dos puntos esto es fácil de entender ya que una curva no puede pasar al mismo tiempo por 3 puntos colineales, por lo que la unica manera en la que puede pasar por los 3 puntos es ser un par de rectas.

d) ¿Cuándo es una parábola?

Solo cuando el quinto punto que define por completo a la cónica se encuentre en el infinito, ya que con ellos no está definido el centro de la cónica, al ser la parábola la única cónica que no tiene un centro, la cónica será una.

8.- Muestre que los puntos $A\,(3,-2,7)$, $B\,(6,4,-2)$ y $C\,(5,2,1)$ se encuentran sobre la misma recta.

Para ello considerese primero la recta determinada por los puntos A y C, si B es colineal con ellos, entonces se cumple que existen $\alpha,\gamma\in\mathbb{R}$ tales que $\alpha+\gamma=1$ y $B=\alpha A+\gamma C$ por lo que al sustituir eso equivale a resolver

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ que nos da el sistema } \begin{array}{ll} 1) & 3\alpha+5\gamma=6 \\ 2) & -2\alpha+2\gamma=4 \\ 3) & 7\alpha+\gamma=-2 \\ 4) & \alpha+\gamma=1\,(*) \end{array}$$

(* se añade de la condición que deben cumplir α,γ) que aparentemente es un sistema de ecuaciones sin solución, ya que tiene mayor número de ecuaciones que de variables, pero en caso de que exista la solución bastara con resolver dos ecuaciones del sistema de cuatro, tomando las ecuaciones 3) y 4) se puede despejar γ de 4) con lo que $\gamma=1-\alpha$ y al sustituir en 3) se tiene $7\alpha+1-\alpha=-2$ por lo que $6\alpha=-3$ y de esto que $\alpha=-\frac{1}{2}$ lo que implica $\gamma=\frac{3}{2}$, ahora lo adecuado es comprobar que estos valores de α y γ satisfacen el par de ecuaciones restantes, por lo que la sustituir se tiene

$$\begin{array}{c} 3\alpha+5\gamma=6 \\ -2\alpha+2\gamma=4 \end{array} \text{ sustituyendo } \begin{array}{c} 3\left(-\frac{1}{2}\right)+5\left(\frac{3}{2}\right)=6 \\ -2\left(-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{3}{2}\right)=4 \end{array} \text{ con lo que } \begin{array}{c} -\frac{3}{2}+\frac{15}{2}=6 \\ 1+3=4 \end{array}$$

con lo cual se confirma el hecho de que los valores encontrados para α y γ satisfacen las cuatro ecuaciones por lo tanto al existir dichos valores, se puede afirmar que se cumple el que $B=\alpha A+\gamma C$ con $\alpha+\gamma=1$ y por lo tanto los puntos $A\,(3,-2,7)$, $B\,(6,4,-2)$ y $C\,(5,2,1)$ se encuentran sobre la misma recta.

9.- Dados dos puntos $A\,(x_a,y_a,z_a)$ y $B\,(x_b,y_b,z_b)$, muestre que el punto de intersección de la recta perpendicular que une a dichos puntos y que parte del origen es

10.- Encuentre la distancia entre los planos paralelos $\Pi_1: 2x-y+3z=4$ y $\Pi_2: 4x-3y-2z+5=0$.

Dado que los planos son paralelos bastara con tomar un punto en cualquiera de los dos planos y calcular la distancia de dicho punto al otro plano, para ello tomemos un punto en el plano Π_1 sea el punto $p_1\,(0,-4,0)\in\Pi_1$ ahora solo se debe calcular la distancia de ese punto al plano Π_2 se pued simplemente usar que $d\,(p,\Pi)=\frac{ax+by+cz+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ con cual se tendrá que $d\,(p_1,\Pi_2)=\frac{4(0)-3(-4)-2(0)+5}{\sqrt{4^2+(-3)^2+(-2)^2}}=\frac{17}{\sqrt{29}}$ con lo que la distancia entre los planos Π_1 y Π_2 será de $\frac{17}{\sqrt{29}}$

11.- Describa el lugar geométrico de los puntos que se encuentran a igual distancia del origen al plano $3x + y - 2z = 11$.

Ya que la distancia de un punto $p(x_0, y_0, z_0)$ a una plano $\Pi : ax + by + cz + d = 0$ esta dada por $d(\Pi, p) = \frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, se tiene entonces que $\mathcal{L} := \{p \,|\, d(p, \Pi_1) = d(p, 0)\ ,\ \Pi_1 : 3x + y - 2z = 11\}$ con lo que los puntos en el lugar geométrico que se busca satisfacen la ecuación $\frac{3x+y-2z-11}{\sqrt{(3)^2+(1)^2+(-2)^2}} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}$, que elevando al cuadrado en ambos lados de la igualdad equivale a $\frac{(3x+y-2z-11)^2}{14} = x^2 + y^2 + z^2$, con lo que $(3x + y - 2z - 11)^2 = 14x^2 + 14y^2 + 14z^2$ y al desarrollar es $9x^2 + y^2 + 4z^2 + 6xy - 12xz - 4yz - 66x - 22y + 44z + 121 = 14x^2 + 14y^2 + 14z^2$ que al simplificar se tiene $5x^2 + 13y^2 + 10z^2 - 6xy + 12xz + 4yz + 66x + 22y - 44z - 121 = 0$, que es la ecuación de un paraboloide de revolución tal y como se ve en la imagen 5, esto parece un tanto obvio, ya que si se toma el plano una recta y un punto, el conjunto que se produce en el plano es una parábola, si se hace girar la recta, el punto y la parábola, respecto a la el eje de la misma, la parábola producirá el paraboloide, el punto no variara y la recta producirá el plano.

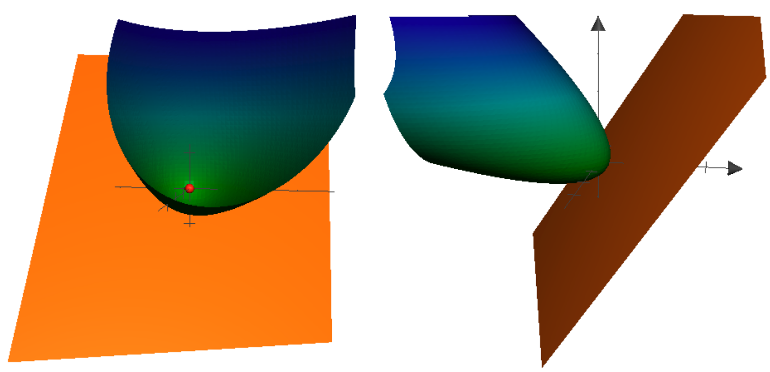

Figura 5: El paraboloide de revolución, el plano y el punto que lo generan.

12.- Encuentre la ecuación del plano que pasa por $q(1, 3, 2)$ y que es perpendicular a los planos $\Pi_1 : 2x + 3y - 4z = 2$ y $\Pi_2 : 4x - 3y - 2z = 5$.

Teniendo $2x + 3y - 4z = 2$ y $4x - 3y - 2z = 5$ las ecuaciones cartesianas de los dos planos es posible obtener directamente un vector normal a cada uno de los planos, dados por los coeficientes de x, y, z en cada una de la ecuaciones, por lo que los vectores normales son $n_1(2, 3, -4)$ y $n_2(4, -3, -2)$ ahora bien para que el plano sea perpendicular a los dos planos, este debe ser perpendicular a su vez a un vector que lo sea a los dos vectores normales a cada uno de los plano, ya que este será de alguna manera paralelo a ambos planos, por lo cual al ser $n_0 = n_1 \times n_2$ un vector perpendicular a los normales de cada plano, es precisamente este el vector normal al plano buscado recordando que

$$n_0 = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -18\hat{\imath} - 12\hat{\jmath} - 18\hat{\jmath} = (-18, -12, -18)$$

ahora bien teniendo el vector normal al plano $n_0 = 6\,(-3,-2,-3)$, y al querer que el plano plase por el punto q se tiene que $\Pi_0 : (p-q)\cdot n_0 = 0$ sustituyendo se tiene $(x-1, y-3, z-2)\cdot 6\,(-3,-2,-3) = 0$ por propiedad del producto punto $6\,((x-1, y-3, z-2)\cdot (-3,-2,-3)) = 0$ por lo que al desarrollar se tiene $6\,(-3x+3-2y+6-3z+6) = 0$ que al simplificar se obtiene la ecuación equivalente $-3x-2y-3z+15 = 0$ por lo que finalmente la ecuación del plano perpendicular a Π_1, Π_2 y que pasa por q es $\Pi_0 : 3x+2y+3z-15 = 0$.

13.- ¿Para que valores de k la colección de puntos $A\,(k,2,-2)$, $B\,(2,-2,k)$ y $C\,(-2,1,3)$ son colineales?

No existe ningún valor k para el cual los puntos $A\,(k,2,-2)$, $B\,(2,-2,k)$ y $C\,(-2,1,3)$ sean colineales, tomemos la recta formada por los puntos A y C, si se desea saber si B puede ser colineal con ellos, entonces se puede encontrar $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha+\gamma = 1$ y $B = \alpha A + \gamma C$ por lo que al sustituir eso equivale a encontrar dichos valores tales que satisfagan

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ k \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ que nos da el sistema } \begin{array}{rc} 1) & k\alpha - 2\gamma = 2 \\ 2) & 2\alpha + \gamma = -2 \\ 3) & -2\alpha + 3\gamma = k \\ 4) & \alpha + \gamma = 1 \end{array}$$

que efectivamente como se nota para encontrar α y γ basta con tomar en cuenta las ecuaciones 2) y 4) que al resolver dan los valores $\alpha = -3$ y $\gamma = 4$, pero si se sutituyen estos valores en la ecuación 3) dan el valor de $k = 18$, pero si se comprueba en la ecuación 1) no se satisafce la ecuación, por lo que no existen los valores de α y γ que satisfagan las cuatro igualdades y por lo tanto los puntos $A\,(k,2,-2)$, $B\,(2,-2,k)$ y $C\,(-2,1,3)$ no pueden ser colineales para ningún valor de k.

14.- Encuentre la ecuación del plano que pasa por $q_0\,(2,-2,0)$ y es perpendicular a la recta formada por $z = 3$, $y = 2x-4$.

Lo primero es poner la recta en su forma paramétrica, primero hay que identificar la forma de un vector en la intersección de los planos, ya que uno de los planos es $z = 3$ y el otro plano $y = 2x-4$ no tiene restricciones se puede afirmar que todo punto en la recta (es decir la intersección de los planos) es de la forma

$$P\,(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t-4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que es precisamente la ecuación paramétrica de la recta, ahora bien para que el plano sea perpendicular a la recta, este debe serlo a su vez al vector generador de la recta, ya que el vector generador es $n_1(1,2,0)$ este mismo es el vector normal al plano, ahora ya que el plano debe pasar por el punto q_0 este queda definido por $\Pi_1:(p-q_0)\cdot n_1=$ que al sustituir se tiene $((x,y,z)-(2,-2,0))\cdot(1,2,0)=0$ que implica $(x-2,y+2,z)\cdot(1,2,0)=0$ con lo que al desarrollar se tiene $x-2+2y+4=0$ por lo que finalmente el plano que se busca está definido por la ecuación cartesiana de tal manera que $\Pi_1: x+2y+2=0$

15.- Muestre que la refelxión del punto $A(x_a,y_a,z_a)$ con respecto al plano $\lambda x+\mu y+\nu z+\rho=0$, tiene por coordenadas

$$\begin{pmatrix} \frac{\left(\mu^2+\nu^2-\lambda^2\right)x_a-2\lambda\mu y_a-2\lambda\nu z_a-2\lambda\rho}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2} \\ \frac{\left(\lambda^2+\nu^2-\mu^2\right)x_a-2\mu\nu y_a-2\mu\lambda z_a-2\mu\rho}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2} \\ \frac{\left(\mu^2+\lambda^2-\nu^2\right)x_a-2\nu\lambda y_a-2\nu\mu z_a-2\nu\rho}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2} \end{pmatrix}$$

Si se toma que la reflexión es el opuesto respecto al plano al punto original, este debe encontrarse sobre la recta perpendicular al plano y que pasa por el punto A por lo que en forma paramétrica se tiene la recta $P(t)=(x_a,y_a,z_a)+t(\lambda,\mu,\nu)$

16.- Muestre que el volúmen del tetraedro formado por el origen y los tres puntos $A(x_a,y_a,z_a)$, $B(x_b,y_b,z_b)$ y $C(x_c,y_c,z_c)$ se puede calcular como

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

Para ello lo primero será calcular el volumen de paralelepípedo que determinan los vectores $0\vec{A}$, $0\vec{B}$, $0\vec{C}$ para obtener el volumen del solido es necesario encontrar el área del paralelogramo que conforma la base y multiplicar esta por su altura, para ello primeramente observese la imagen 6 en la que se muestran los tres vectores y el paralelepipedo definido por ellos para una mejor visualización de la idea. Ahora si se recuerda que el área del paralelogramo que conforman los vectores A y B esta dada por la norma del producto vectorial de ambos, es decir $V_p=\|A\times B\|h$, si se considera el ángulo θ que conforman $A\times B$ y el vector restante C y se considera que la altura del paralelepipedo esta dada por $h=\|C\|\cos\theta$, al sustituir se tiene que $V_p=\|A\times B\|\|C\|\cos\theta$ ahora si se nota que $\|A\times B\|\|C\|\cos\theta=(A\times B)\cdot C$ se sustituyen los valores de A, B y C se tiene que $(A\times B)\cdot C=(y_az_b-z_ay_b,z_ax_b-x_az_b,x_ay_b-y_ax_b)\cdot(x_c,y_c,z_c)=x_cy_az_b-z_ay_bx_c+y_cz_ax_b-y_cx_az_b+z_cx_ay_b-z_cy_ax_b$ que al re-ordenar términos se tiene $(A\times B)\cdot C=x_ay_bz_c-x_ay_cz_b-y_ax_bz_c+y_ax_cz_b+z_ax_by_c-z_ax_cy_b=x_a(y_bz_c-y_cz_b)-y_a(x_bz_c-x_cz_b)+z_a(x_by_c-x_cy_b)$ que se puede observar que por lo tanto

$$(A\times B)\cdot C=x_a\begin{vmatrix} y_b & z_b \\ y_c & z_c \end{vmatrix}-y_a\begin{vmatrix} x_b & z_b \\ x_c & z_c \end{vmatrix}+z_a\begin{vmatrix} x_b & y_b \\ x_c & y_c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

por cual el volumen del paralelepidedo definido por los vectores $0\vec{A}$, $0\vec{B}$, $0\vec{C}$ esta dado por

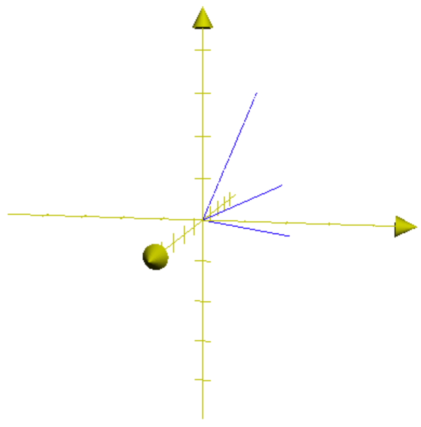

Figura 6: Los vectores A, B y C y el paralelepipedo que determinan

la siguiente igualdad con un deteerminante

$$V_p = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

Ahora considerese el prisma triangular que conforman los mismos 3 vectores $0\vec{A}$, $0\vec{B}$, $0\vec{C}$ cuyo volumen será $V_q = \frac{1}{2}V_p$, dado que el área de su base será la mitad de la del paralelepipedo tal y como se observa en la imagen 7, si se observa esta imagen se verá que el tetraedro

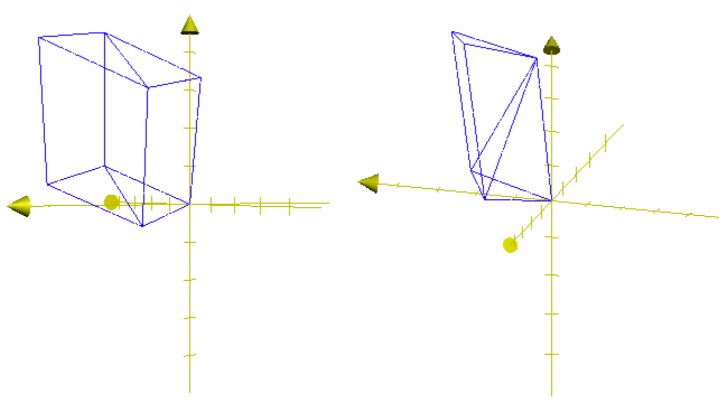

Figura 7: El prisma de volumen $\frac{1}{2}V_p$ y el tetraedro del que se desea su volumen

del que se busca su volumen se encuentra dentro del prisma mencionado anteriormente, por lo cual al tener la misma base y altura de este el volumen del tetraedro, estará dado por $V_t = \frac{1}{3}V_q$ sustituyendo se tiene $V_t = \frac{1}{3}\frac{1}{2}V_p = \frac{1}{6}V_p$ por lo tanto el volumen del tetraedro se puede calcular como

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

17.- Muestre que el punto $q_0\,(-3,1,-4)$ se encuentra sobre la esfera $x^2+y^2+z^2+6x+24y+8z=0$, y escriba adecuadamente, la ecuación del plano tangente a la esfera en ese punto.

Ya que q_0 se encuentra sobre la esfera si y solo si al sustituir sus coordenadas satisfacen la ecuación de la esfera, por lo que al sustituir se tiene $(-3)^2+(1)^2+(-4)^2+6\,(-3)+24\,(1)+8\,(-3)=0$ desarrollando $(-3)^2+(1)^2+(-4)^2+6\,(-3)+24\,(1)+8\,(-4)=0$ que al desarrollar implica $9+1+16-18+24-32=0$ con lo que efectivamente se cumple la igualdad, por lo cual al satisfacer la ecuación de la esfera el punto se encuentra sobre la misma. Ahora bien ya que se puede definir toda cuádrica de forma matricial (es valido ya que la esfera es un caso especifico de cuádrica) se tendrá que la forma matricial de la esfera que es:

$$\mathcal{C}\,(p)\,:\,\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 3 & 12 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0$$

que usando lo aprendido para las cónicas en el plano es posible poner en su forma bilineal de la siguiente manera

$$\mathcal{B}\,(p,q)\,:\,\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 12 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}=0$$

recordando que al sustituir las coordenadas de un punto q en la forma bilineal de una cónica en el plano, se obtenía como resultado la recta polar asociada a ese punto q respecto a la cónica. Además en caso de que el punto se encontrará sobre la cónica, la recta polar resultaba ser a su vez la tangente a la cónica en el punto q, se puede usar esto en el espacio para encontrar el plano tangente por lo que si se toma:

$$\mathcal{B}\,(p,q_0)\,:\,\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 12 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}=0$$

con lo que al desarrollar se tiene $\mathcal{B}\,(p,P)\,:\,-3x+y-4z-9+12-16+3x+12y+4z=0$ que al simplificar es equivalente a $\mathcal{B}\,(p,P)\,:\,y=1$ que es la ecuación de un plano, que en efecto es tangente a la esfera, si quiere verificar el resultado lo más adecuado es completar cuadrados en la ecuación de la esfera $x^2+y^2+z^2+6x+24y+8z=0$ con lo que se tiene la ecuación equivalente $(x+3)^2+(y+12)^2+(z+4)^2=169$ lo que implica que el centro de la esfera tiene coordenadas $x_c\,(-3,-12,-4)$ ahora ya que el plano debe ser tangente a la esfera su vector normal está dado por $n=x_c-q_0$ que sustituyendo da como resultado

$n = (0, -13, 0)$ por lo que la ecuación del plano cumple que $(p - q_0) \cdot n = 0$ al sustituir se tiene $((x, y, z) - (-3, 1, -4)) \cdot (0, -13, 0) = 0$ desarrollando $(x + 3, y - 1, z + 4) \cdot (0, -13, 0) = 0$ que al realizar el producto punto es $-13y + 13 = 0$ con lo que finalmente $\Pi_1 : y = 1$ es el plano tangente a la esfera en q_0 como se muestra en la imagen 8.

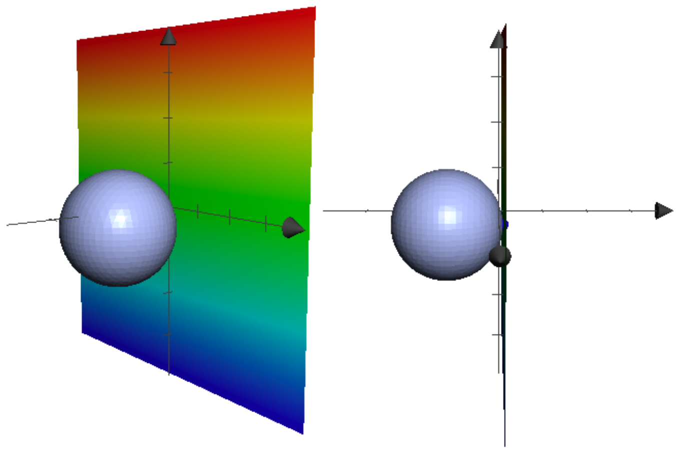

Figura 8: La esfera y el plano $\Pi_1 : y = 1$ tangente a la esfera en $q_0\,(-3, 1, -4)$