Pradel Soto Paulina **150306**
GEOMETRÍA ANALÍTICA II

TRABAJO 9

En clase obtuvimos una representación de la recta tangente a la cónica *C* en un punto p_o, esta viene dada por:

$$C_0(p) = p^t A p_0 + g^t p_0 + p^t g + \gamma = 0$$

Para un punto p_1 sobre la cónica la recta tangente a ella se escribe de manera similar:

$$C_1(p) = p^t A p_1 + g^t p_1 + p^t g + \gamma = 0$$

Identificamos la recta que pasa por ambos puntos mediante la ecuación

$$C_0(p) + C_1(p) = C_{01}$$

Ahora bien, para la siguiente cónica:

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x + 2y = 3$$

1) Identifique el tipo de cónica que describe. Haga un análisis cualitativo de la curva.
2) Encuentre las intersecciones de la cónica con los ejes coordenados y describa las cuatro ecuaciones de las rectas que describen. OJO: use el procedimiento anterior.

RESPUESTAS

1) Para hacer el análisis cualitativo de mi curva cónica, primero veamos cual es el valor de *I*, es decir lo que conocemos como discriminante

   Sabemos que la ecuación general de segundo grado para una cónica es:

   $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

   Por lo tanto para nuestro caso:

   $$A = 3, B = 2, C = 3, D = -2, E = 2, F = 3$$

   Ahora bien, sabemos que el discriminante *I* es:

   $$I = B^2 - 4AC$$

   Entonces:

$$I = 2^2 - 4(3)(3)$$
$$I = 4 - 36 = -32$$

En este caso el discriminante *I<0*, es decir que nos indicaría que la cónica es una elipse.

Observemos que el término *B* de la ecuación me indica que los ejes de la elipse no son paralelos a los ejes coordenados, es decir tenemos una elipse rotada. La rotación de la elipse es de 45º, dado que los términos, *A* y *C* son iguales.

Con ello podemos rotar la parábola para obtener una ecuación de la forma:

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

Y con ello conseguir la forma ordinaria de la ecuación de la elipse y también obtener su excentricidad.

De acuerdo con lo que hemos aprendido sabemos que:

$$A' = A\cos^2\theta + Bsen\theta\cos\theta + Csen^2\theta$$
$$B' = 2(C - A)sen\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - sen^2\theta)$$
$$C' = Asen^2\theta - Bsen\theta\cos\theta + C\cos^2\theta$$
$$D' = D\cos\theta + Esen\theta$$
$$E' = E\cos\theta - Dsen\theta$$
$$F' = F$$

Calculando cada coeficiente y sabiendo que θ=45º, como ya lo mencioné antes, obtenemos la siguiente ecuación:

$$2x'^2 + 4y'^2 + 2.82y' + 3 = 0$$

De esta manera en la ecuación ordinaria de la elipse tenemos que:

$$a^2 = C'$$
$$b^2 = A'$$

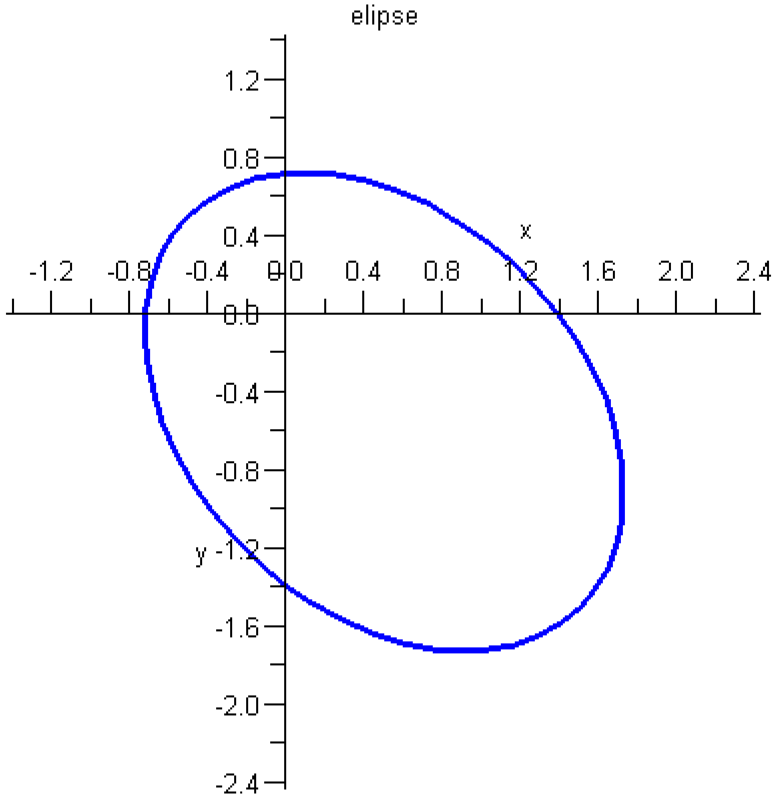
Y la excentricidad *e* es igual a:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

De lo cual tenemos que $e = \sqrt{2}/2 = 0.7071 < 1$

Y seguimos corroborando que es una elipse.

Ahora con una ayuda de nuestro software podemos dibujar nuestra elipse:



2) Ahora encontremos las intersecciones de la elipse con los ejes coordenados y calculemos las ecuaciones de dichas rectas:

Tenemos la ecuación:

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x + 2y = 3$$

Agrupémosla de la siguiente manera y cambiemos las *x* por x_0 y las *y* por y_0:

$$3x_0^{\ 2} + 2x_0(y_0 - 1) + (3y_0^{\ 2} + 2y_0 - 3) = 0$$

Y resolvemos el sistema de ecuaciones para $y_0 = 0$, es decir la intersección de la elipse con el eje y, entonces tengo que:

$$x_{01} = \frac{1+\sqrt{10}}{3}, x_{02} = \frac{1-\sqrt{10}}{3}$$

Ahora podemos agrupar de otra manera para obtener y_0, cuando $x_0 = 0$:

$$3y_0^{\ 2} + 2y_0(x_0 + 1) + (3x_0^{\ 2} - 2y_0 - 3) = 0$$

Y resolviendo el sistema de ecuaciones para $x_0=0$, es decir la intersección de la elipse con el eje x, tenemos que:

$$y_{01} = \frac{-1+\sqrt{10}}{3}, x_{02} = \frac{-1-\sqrt{10}}{3}$$

Ahora podemos sacar las ecuaciones de las rectas que forman un polígono dentro de la elipse considerando los 4 puntos que ya tenemos,

Hagamos primero un caso general con un punto P_0 *y* un punto P_1.

Teniendo las ecuaciones de las rectas que pasan por P_0 y por P_1, es decir las ecuaciones tangentes a la elipse que pasan por esos puntos, podemos obtener una recta que una a estos dos puntos, de tal manera que

$$\alpha C_0(p) + \beta C_1(p) = 1$$

Esto para algún punto p que pase por la elipse.

Por lo tanto debo tener que:

$$\alpha C_0(P_0) + \beta C_1(P_0) = 1$$
$$\alpha C_0(P_1) + \beta C_1(P_1) = 1$$

Donde C_0 es la ecuación de la recta tangente que pasa por P_0, y donde C_1 es la ecuación de la recta tangente que pasa por P_1, es decir que entonces:

$$C_0(P_0) = 0$$
$$C_1(P_1) = 1$$

Por lo tanto:

$$\beta = \frac{1}{C_1(P_0)}, \alpha = \frac{1}{C_0(P_1)}$$

Y la ecuación de la cuerda queda como:

$$C_0(p) + C_1(p) = C_{01}$$

Donde por simetría $C_{01}=C_1(P_0)=C_0(P_1)$

Y donde como ya sabíamos:

$$C_0(p) = (x,y)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + (-1,1)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + (x,y)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 = 0$$

Y donde:

$$C_1(p) = (x,y)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + (-1,1)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + (x,y)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 = 0$$

Y donde (*x_0, y0*) es el punto tangente a la cónica.

Ahora en particular para cada punto tenemos que:

a) Ecuación de la recta que pasa por $P_1(x_{01},0)$ y $P_2(0,y_{01})$

$$C_{01} = C_0(P_1) = C_1(P_2)$$

$$C_{01} = (x,y)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{10}}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + (-1,1)\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{10}}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + (x,y)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 = 0$$

b) Ecuación de la recta que pasa por $P_2(0,y_{01})$, $P_3(x_{02},0)$

$$C_{01} = (x,y)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1+\sqrt{10}}{3} \end{pmatrix} + (-1,1)\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1+\sqrt{10}}{3} \end{pmatrix} + (x,y)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 = 0$$

c) Ecuación de la recta que pasa por $P_3(x_{02},0)$, $P_4(0,y_{02})$

$$C_{01} = (x,y)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{10}}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + (-1,1)\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{10}}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + (x,y)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 = 0$$

d) Ecuación de la recta que pasa por $P_4(0,y_{02})$, $P_1(x_{01},0)$

$$C_{01} = (x, y)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{-1-\sqrt{10}}{3} \end{pmatrix} + (-1,1)\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{-1-\sqrt{10}}{3} \end{pmatrix} + (x, y)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 = 0$$