Geometría Analítica II

Trabajo 4

Prof. Pablo barrera Alumno: Ernesto Velasco Grupo: 4078

1.- Considere la figura $\mathcal{F}_1$ determinada por el polígono abierto $P_1\,(-3,0)$, $P_2\,(0,3)$ y $P_3\,(3,0)$, de igual manera, considere la figura $\mathcal{F}_2$ representada por el segmento $Q_1\,(-2,3)$ y $Q_2\,(2,3)$. Determine el lugar geométrico de todos los puntos que pertenecen al eje medial entre ambas figuras : $\mathcal{L} := \{P \mid d\,(P,\mathcal{F}_1) = d\,(P,\mathcal{F}_2)\}$

Como en otra ocasión lo primero es hacer divisiones según la región sobre la cual un punto estará a una distancia menor de un punto o un segmento de las figuras , esto dará como resultado haciendo las divisiones adecuadas, la imagen 1 lo cual permite aplicar las formulas de distancia de la manera adecuada, sin embargo resulta obvio que algunas de estas zonas no son capaces de contener a ninguno de los puntos del lugar geométrico que se quiere encontrar, tal es el caso de la zona que se encuentra por debajo de $\mathcal{F}_1$ formando un cuadrado en la cual

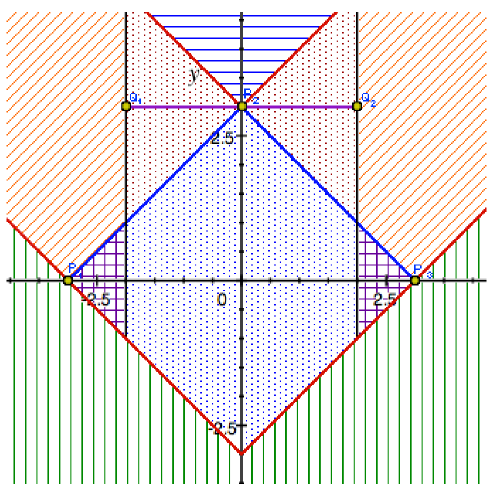

Figura 1: Regiones en concordancia con la distancia de los puntos en ella con respecto a $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$

no hay evidentemente ningún punto del eje medial entre $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$, es también fácil observar que tanto P_2, así como todo el eje y por encima de P_2, forman parte de este con junto por el simple hecho de que la distancia perpendicular de cualquier punto P a $\mathcal{F}_2$, (que es la mínima a esta figura), sobre el eje de las ordenadas esa distancia es la misma a P_2 que sería a su vez la distancia de P a $\mathcal{F}_2$, y además P_2 forma parte este conjunto ya que se encuentra tanto en $\mathcal{F}_1$ como en $\mathcal{F}_2$ por lo cual $d(P_2, \mathcal{F}_1) = d(P_2, \mathcal{F}_1) = 0$. Una vez descartadas estas posibilidades quedan tan solo unas cuantas posibilidades. Primeramente queremos el conjunto de puntos tales que, $d(P, P_1) = d(P, Q_1)$, con lo que se obtiene la ecuación $x + 3y - 2 = 0$, de manera análoga para P_3 y Q_2 se obtiene la recta cuya ecuación es $x - 3y - 2 = 0$, este par de rectas determinarán el eje medial en la zona de marcada en franjas verdes en la imagen 1, en la región de franjas anaranjadas la distancia de los puntos P será calculada en relación a Q_1 y el segmento $\overline{P_1P_2}$, ó a Q_2 y $\overline{P_2P_3}$. lo que nos da al hacer al calcular la distancia las ecuaciones de 2 parábolas, en el caso de Q_1 y $\overline{P_1P_2}$ dan como resultado $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 6y + 17 = 0$, así como $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 6y + 17 = 0$ para Q_2 y $\overline{P_2, P_3}$. Otro paso necesario analizar los puntos del eje medial en el área entre las parejas de segmentos $\overline{Q_1P_2}$, $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_2Q_2}$, $\overline{P_2P_3}$, para hacer más sencillo este último paso, yo he considerado los segmentos mencionados anteriormente como rectas completas es decir a los segmentos $\overline{Q_1P_2}$ y $\overline{P_2Q_2}$ los representa obviamente la recta $y = 3$, para $\overline{P_1P_2}$ es la recta $-x + y - 3 = 0$, y la recta $x + y - 3 = 0$ en el caso de $\overline{P_2P_3}$, ahora bien ya que los puntos de esta región se encuentran bajo la recta $y - 3 = 0$ al aplicar la distancia de un punto a una recta con la ecuación anterior junto con $x + y - 3 = 0$ se tendrá: $\frac{y-3}{-\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{x+y-3}{\sqrt{1^2+1^2}}$ con lo cual $\sqrt{2}\,(-y+3) = x + y - 3$ que al simplificar da la recta $x + \left(1+\sqrt{2}\right) y - 3\left(1+\sqrt{2}\right) = 0$, de manera similar con la recta $-x + y - 3 = 0$ se obtiene la ecuación $-x + \left(1+\sqrt{2}\right) y - 3\left(1+\sqrt{2}\right) = 0$. Para finalizar solo es necesario encontrar los intervalos en x de cada una de las ecuaciones en las que son validos, obviamente el eje y es parte del conjunto cuando $y \geq 3$, en el caso de las rectas $-x + \left(1+\sqrt{2}\right) y - 3\left(1+\sqrt{2}\right) = 0$ y $x + \left(1+\sqrt{2}\right) y - 3\left(1+\sqrt{2}\right) = 0$ es fácil notar que son la representación de $\mathcal{L}$ para $-2 \leq x \leq 0$ y $0 \leq x \leq 2$ y que en $x = 0$ estos segmentos se cortan en P_2, en el $x < -2$ y $x > 2$ la distancia mínima a $\mathcal{F}_2$ ya no es la distancia de un punto P al segmento $\overline{Q_1Q_2}$ si no la distancia de P a Q_1 ó Q_2 respectivamente. En los intervalos $-\frac{11}{2} \leq x \leq -2$ y $2 \leq x \leq \frac{11}{2}$ las parábolas $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 6y + 17 = 0$, $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 6y + 17 = 0$ las que representan a $\mathcal{L}$, para encontrar el valor de $-\frac{11}{2}$ en el caso de $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 6y + 17 = 0$ lo que se debe hacer es considerar la recta $x + y = -3$ que es el limite en el que es aplicable la distancia a $\overline{P_1P_2}$ como distancia a $\mathcal{F}_1$ (en la imagen 1 seria la linea roja que marca el limite inferior de la franja izquierda de lineas anaranjadas) por lo que despejando $x = -y - 3$ y sustituyendo $(-y-3)^2 + 2(-y-3)y + y^2 + 2(-y-3) - 6y + 17 = 0$, desarrollando $y^2 + 6y + 9 - 2y^2 - 6y + y^2 - 2y - 6 - 6y + 17 = 0$ con lo que $y = \frac{5}{2}$ y a su vez $x = -\frac{11}{2}$, considerando al recta $y - x = -3$ y la parábola $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 6y + 17 = 0$ se tiene $x = \frac{11}{2}$ obteniendo de la misma manera. Para terminar las rectas $x + \left(1+\sqrt{2}\right) y - 3\left(1+\sqrt{2}\right) = 0$, $-x + \left(1+\sqrt{2}\right) y - 3\left(1+\sqrt{2}\right) = 0$ son validas para $x \leq -\frac{11}{2}$ y $\frac{11}{2} \leq x$ en cada caso, similar a lo que se hizo con las parábolas se deben considerar las rectas antes mencionadas que representas los limites de las franjas (imagen 1, en color nanaja) en las que la distancia de P a $\mathcal{F}_1$ se calcula con respecto a $\overline{P_1P_2}$ ó $\overline{P_2P_3}$ y calcular el valor de x en el sistema de ecuaciones. Una vez hecho esto el resultado se puede ver en color verde en la imagen 2.

2.- Considere la figura $\mathcal{F}_1$ determinada por el polígono abierto $P_1(-3,0)$, $P_2(0,3)$ y $P_3(3,0)$, de igual manera, considere la figura $\mathcal{F}_2$ representada por el segmento $Q_1(0,2)$ y $Q_2(0,4)$.

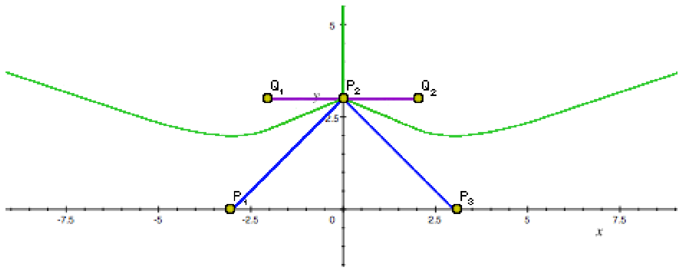

Figura 2: Eje medial entre $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$

Determine el lugar geométrico de todos los puntos que pertenecen al eje medial entre ambas figuras : $\mathcal{L} := \{P \mid d\left(P, \mathcal{F}_1\right) = d\left(P, \mathcal{F}_2\right)\}$

El procedimiento en este caso es muy parecido a lo que se hizo anteriormente, con la variación en las zonas que delimitan los puntos P según su distancia tanto a $\mathcal{F}_1$ como a $\mathcal{F}_2$, nuevamente ciertas zonas no pueden contener puntos del lugar geométrico por lo que se les descarta una de ellas es la región triangular por encima de P_2 pese a que este punto si pertenece a $\mathcal{L}$ ningún punto por encima del mismo lo esta ya que como se observa en la imagen 3 todo punto en esa zona estará más cerca de Q_2 o del segmento que forma el punto anterior con

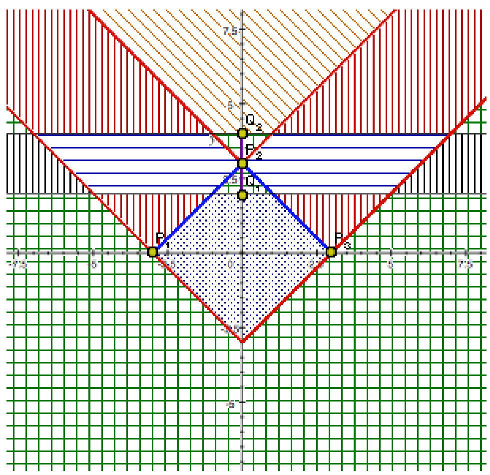

Figura 3: Eje medial entre $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$

Q_1 que de P_2 otra observación que facilita el proceso de identificar el eje medial, es que este se dividirá en dos ramas dentro y fuera del areá del cuadro bajo $\mathcal{F}_1$ analizando las tenemos 2 pares de rectas y 1 par de parábolas fuera del cuadro antes mencionado, el primer par de rectas es $\left(\sqrt{2}-1\right)x + y - 3 = 0$ y $\left(\sqrt{2}-1\right)x - y + 3 = 0$ que son en realidad las bisectrices entre las parejas de segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{Q_1Q_2}$ y $\overline{P_2P_3}$, $\overline{Q_1Q_2}$ que si se delimitan en los intervalos $-\frac{5}{2} \leq x \leq 0$ y $0 \leq x \leq \frac{5}{2}$ respectivamente representaran fielmente a $\mathcal{L}$, después las parábolas $x^2 + 2xy + y^2 - 10y - 6x + 23 = 0$ y $x^2 + 2xy + y^2 - 10y - 6x + 23 = 0$, en los intervalos $-\frac{31}{2} \leq x \leq -\frac{5}{2}$ y $\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{31}{2}$ como en el ejercicio anterior lo que se debe hacer es calcular las intersecciones de las parábolas con la rectas que representan los limites de las franjas por ultimo en esta parte se encuentran las rectas $6x+8y-7=0$ y $6x+8y-7=0$ respectivamente en $x \leq -\frac{31}{2}$ y $\frac{31}{2} \leq x$ son la representación de $\mathcal{L}$ en la región fuera de las franjas de la imagen 3 y del areá bajo $\mathcal{F}_1$, ahora simplem,ente debemos considerar precisamente la zona bajo $\mathcal{F}_1$ nuevamente tendremos dos segmentos de recta y dos paráabolas las rectas con ecuación $x + \left(\sqrt{2}-1\right)y + 3\left(1-\sqrt{2}\right) = 0$ y $x - \left(\sqrt{2}-1\right)y + 3\left(\sqrt{2}-1\right) = 0$ en el intervalo de y, $2 \leq y \leq 3$ determinan el eje medial dentro de la zona bajo $\mathcal{F}_1$ para finalizar el par de parábolas $x^2 - 2xy + y^2 + 6y - 2y - 1 = 0$, $x^2 + 2xy + y^2 - 6y - 2y - 1 = 0$ representan finalmente a $\mathcal{L}$ hasta su corte sobre el eje y con lo que al unir todas las estructuras antes mencionadas se da como resultado el je medial de color verde de la imagen 4

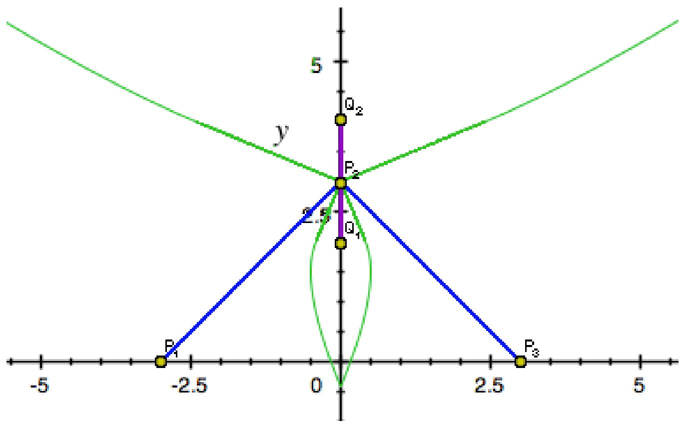

Figura 4: Eje medial entre $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$