Geometría Analítica II

Trabajo 3

Prof. Pablo barrera Alumno: Ernesto Velasco Grupo: 4078

1.- Calcule la distancia de un punto P_0 a una recta $\mathcal{L}$, donde:

a) La recta $\mathcal{L}$ está determinada por $3x - 2y + 4 = 0$ y el punto $P_0\,(3, -8)$

Ya que la recta $\mathcal{L}$ tiene ecuación cartesiana tomando el vector generador de la recta $Q\,(2,3)$ y el vector $P\,(0,2)$ sobre la recta tenemos la ecuación paramétrica de la recta que será $P\,(t) = (0,2) + t\,(2,3)$, ya que $t = \frac{(P_0 - P)\cdot Q}{Q\cdot Q}$ sustituyendo valores tenemos $t = \frac{(3,-10)\cdot(2,3)}{13}$, con lo cual $t = -\frac{24}{13}$ sustituyendo en la ecuación paramétrica de la recta se tiene $P\left(-\frac{24}{13}\right) = (0,2) + \left(-\frac{24}{13}\right)(2,3)$ con lo cual $P(t) = \left(-\frac{48}{13}, -\frac{46}{13}\right)$, ahora solo se debe tomar $d\,(P_0, P\,(t)) = \sqrt{\left(3 + \frac{48}{13}\right)^2 + \left(-8 + \frac{46}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{10933}{13}} = \frac{29}{\sqrt{13}}$, que es a su vez la distancia de P_0 a $\mathcal{L}$

b) La recta $\mathcal{L}$ está determinada por los puntos $P\,(1,0,4)$ y $Q\,(-1,-1,-1)$, y el punto $P_0\,(1,-2,3)$

Definiendo la ecuación paramétrica con P y Q se tiene $P\,(t) = P + t\,(Q - P)$, por lo que $P\,(t) = (1,0,4) + t\underbrace{(-2,-1,-5)}_{W}$, como $t = \frac{(P_0 - P)\cdot W}{W\cdot W}$, se tiene entonces $t = \frac{((1,-2,3)-(1,0,4))\cdot(-2,-1,-5)}{(-2,-1,-5)\cdot(-2,-1,-5)} = \frac{(0,-2,-1)\cdot(-2,-1,-5)}{4+1+25} = \frac{0+2+5}{30}$ con lo cual $t = \frac{7}{30}$ sustituyendo en la ecuación de la recta obtenemos $P\left(\frac{7}{30}\right) = (1,0,4) + \left(\frac{7}{30}\right)(-2,-1,-5) = (1,0,4) + \left(-\frac{14}{30}, -\frac{7}{30}, -\frac{35}{30}\right) = \left(\frac{16}{30}, -\frac{7}{30}, \frac{85}{30}\right)$, que serán las coordenadas de $P_g\left(\frac{16}{30}, -\frac{7}{30}, \frac{85}{30}\right)$ ahora se calcula $d\,(P_0, P_g) = \sqrt{\left(1 - \frac{16}{30}\right)^2 + \left(-2 + \frac{7}{30}\right)^2 + \left(3 - \frac{85}{30}\right)^2}$ $= \sqrt{\left(\frac{14}{30}\right)^2 + \left(-\frac{53}{30}\right)^2 + \left(\frac{5}{30}\right)^2} = \sqrt{\frac{196}{900} + \frac{2809}{900} + \frac{25}{900}} = \sqrt{\frac{3030}{900}} = \frac{\sqrt{101}\sqrt{30}}{30} = \frac{\sqrt{101}}{\sqrt{30}}$ con lo cual la distancia de P_0 a $\mathcal{L}$ es $\frac{\sqrt{101}}{\sqrt{30}}$

c) La recta está determinada por la intersección de los planos $\Pi_1 : x - y + 2z - 4 = 0$ y $\Pi_2 : x + y + z = 1$ y el punto $P_0\,(1,1,10)$

Primeramente se deben encontrar dos puntos sobre la recta necesarios para definir la ecuación paramétrica de la misma, para mayor facilidad yo he elegido considerar valores enteros en las coordenadas de los puntos sobre la recta, considerando $x = 1$ se se obtienen valores $y = -1$ y $z = 1$, así como para $x = 4$ al evaluar se tiene $y = -2$ y $z = -1$, ya con estos se forman los puntos $P\,(1,-1,-1)$ y $Q\,(4,-2,-1)$ ya con estos se puede definir la ecuación paramétrica de la recta como $P\,(t) = (4,-2,-1) + t\underbrace{(-3,1,2)}_{W}$, el valor adecuado es dado por $t = \frac{(P_0 - P)\cdot W}{W\cdot W}$, se tiene

entonces $t = \frac{(-3,3,11)\cdot(-3,1,2)}{(-3,1,2)\cdot(-3,1,2)} = \frac{9+3+22}{9+1+4} = \frac{34}{14}$ por lo quel $t = \frac{17}{7}$ sustituyendo en la ecuación de la recta $P\left(\frac{17}{7}\right) = (4,-2,-1) + \left(\frac{17}{7}\right)(-3,1,2) = (4,-2,-1) + \left(-\frac{51}{7}, \frac{17}{7}, \frac{34}{7}\right) = \left(-\frac{23}{7}, \frac{3}{7}, \frac{27}{7}\right)$, que serán las coordenadas de P_g ahora se calcula $d(P_0, P_g) = \sqrt{\left(1+\frac{23}{7}\right)^2 + \left(1-\frac{3}{7}\right)^2 + \left(10-\frac{27}{7}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{30}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{7}\right)^2 + \left(\frac{43}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{900}{49} + \frac{16}{49} + \frac{1849}{49}} = \sqrt{\frac{2765}{49}} = \frac{\sqrt{395}\sqrt{7}}{7} = \frac{\sqrt{395}}{\sqrt{7}}$ con lo cual la distancia de P_0 a $\mathcal{L}$ es $\frac{\sqrt{395}}{\sqrt{7}}$

2.-Encuentre la representación baricéntrica de $P(-1,1,-1)$ con respecto a los puntos $P_1(1,-1,0)$, $P_2(3,0,5)$, $P_3(0,1,1)$, $P_4(5,4,3)$

Ya que se debe expresar P como una combinación lineal de los otros puntos, incluyendo la condición $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$, se pude conformar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{r} 1)\ 1\alpha_1 + 3\alpha_2 + 0\alpha_3 + 5\alpha_4 = -1 \\ 2)\ -1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1\alpha_3 + 4\alpha_4 = 1 \\ 3)\ 0\alpha_1 + 5\alpha_2 + 1\alpha_3 + 3\alpha_4 = -1 \\ 4)\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 \end{array} \quad \text{que es equivalente a} \quad \begin{array}{r} 1)\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_4 = -1 \\ 2)\ -\alpha_1 + \alpha_3 + 4\alpha_4 = 1 \\ 3)\ 5\alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4 = -1 \\ 4)\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 \end{array} \quad \text{sumando 1 y 2}$$

se obtiene $3\alpha_2 + \alpha_3 + 9\alpha_4 = 0 \implies \alpha_3 = -3\alpha_2 - 9\alpha_4$ sustituyendo en 3 $\implies 5\alpha_2 - 3\alpha_2 - 9\alpha_4 + 3\alpha_4 = -1 \implies 2\alpha_2 - 6\alpha_4 = -1 \implies \alpha_2 = 3\alpha_4 - \frac{1}{2}$ sustituyendo en la resta de 1 y 4 se tiene primeramente $2\alpha_2 - \alpha_3 + 4\alpha_4 = -2 \implies -1 + 6\alpha_4 + 3\alpha_2 + 9\alpha_4 + 4\alpha_4 = -2 \implies 3\alpha_2 + 19\alpha_4 = -1 \implies \alpha_4 = \frac{1}{56}$ con lo cual $\alpha_2 = -\frac{25}{56}$, $\alpha_3 = \frac{66}{56}$ y $\alpha_1 = \frac{14}{46}$

con lo que la representación baricéntrica de P es : $P = \frac{14}{46}P_1 - \frac{25}{56}P_2 + \frac{66}{56}P_3 + \frac{1}{56}P_4$