Geometría Analítica II

Trabajo 35

Prof. Pablo Barrera

Alumno: Ernesto Velasco

Grupo: 4078

1.- Sea la esfera $\mathcal{E}_0 : x^2 + y^2 + (z - r)^2 = r^2$ y sea una familia de rectas paralelas en el plano XY , es decir el plano $\Pi_0 : z = 0$, encontrar los planos que producen esta familia de rectas al proyectar el punto $p_0 = (0, 0, 2r)$ sobre las circunferencias que producen los planos mencionados antes sobre el plano XY .

Recordemos que la proyección del punto p_0 sobre la esfera en el plano XY se encuentra dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2r}{2r-z_1} x_1 \\ \frac{2r}{2r-z_1} y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ahora tomemos un vector sobre el plano XY sea este el vector $v_x = (\tilde{x}, \tilde{y}, 0)$ y considerese la familia de rectas paralelas que tienen como vector generador a v_x es decir las rectas de la forma $\ell(t) = q_0 + tv_x$, $q_0 \in \Pi_0$ que se observa se encuentran dadas como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + t\tilde{x} \\ \beta + t\tilde{y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

con lo cual ya es posible obtener dos puntos sobre la recta sean estos los puntos $q_0 = (\alpha, \beta, 0)$ y $q_1 = (\alpha + \tilde{x}, \beta + \tilde{y}, 0)$ con estos construyamos los vectores $w_1 = q_0 - p_0 = (\alpha, \beta, -2r)$ $w_2 = q_1 - p_0 = (\alpha + \tilde{x}, \beta + \tilde{y}, -2r)$ y tomando el producto cruz de estos dos vectores, obtendremos el vector $n = (2r\tilde{y}, -2r\tilde{x}, \alpha\tilde{y} - \beta\tilde{x})$ con lo que el plano estará dado por $(p - p_0) \cdot n = 0$ que al sustituir valores se tiene que $(x, y, z - 2r) \cdot (2r\tilde{y}, -2r\tilde{x}, \alpha\tilde{y} - \beta\tilde{x}) = 0$ con lo que se observa que la ecuación cartesiana del plano que se buscaba es $2r\tilde{y}x - 2r\tilde{x}y + (\alpha\tilde{y} - \beta\tilde{x})z + 2r(\beta\tilde{x} - \alpha\tilde{y}) = 0$.