Geometría Analítica II

Trabajo 34

Prof. Pablo Barrera Alumno: Ernesto Velasco Grupo: 4078

1.- Sea la circunferencia dada por la esfera $\mathcal{E}_0 : x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 16$ y el plano $\Pi_0 : y = z$, encontrar la interección de la proyección del punto $p_0 = (0,0,8)$ sobre la circunferencia dicha antes y el plano XY.

Primeramente, encontremos el centro de la circunferencia

$$\mathcal{C}_0 : \begin{cases} x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 16 \\ y = z \end{cases}$$

se observa que el centro de la esfera c_0 tiene coordenadas $c_0 = (0,0,4)$ y se tiene que el vector normal al plano Π_0 es $n_0 = (0,1,-1)$ ahora consideremos la recta $p(t) = c_0 + tn_0$ es decir que se tiene la recta dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 4-t \end{pmatrix}$$

con lo que si se sustituyen en la ecución del plano se tiene $t = 4 - t$ con lo cual se tiene que $t = 2$, ahora con ello se observa que el centro de la circunferencia está dado como $c_0 = (0,2,2)$, ahora lo siguiente es construir la ecuación vectorial de nuestra circunferencia para ello tomemos un punto distinto en el plano Π_0 sea este $p_{o1} = (0,0,0)$ con lo que se debe tomar el vector $v_1 = p_{o1} - c_0 = (0,-2,-2)$, ahora debemos encontrar otro punto en el plano tal que se cumple que $v_2 = p_{o2} - c_0$ y $v_1 \cdot v_2 = 0$, ahora bien $v_2 = p_{o2} - c_0 = (x_p, y_p - 2, z_p - 2)$ por lo que $v_1 \cdot v_2 = -2y_p + 4 - 2z_p + 4$ y se debe de cumplir que $-2y_p + 4 - 2z_p + 4 = 0$ por lo cual se observa que $y_p + z_p = 4$, pero ya que $p_{o2} \in \Pi_0$ se cumple que $y_p = z_p$ por lo cual $2y_p = 4$ con lo que se tiene que $y_p = 2$ y $z_p = 2$ y se observa que se puede dar un valor cualquiera, distinto de 0, a x_p por lo que se usará esto para tomar el siguiente punto $p_{o2} = (1,2,2)$ con lo que se tiene que $v_2 = (1,0,0)$, ahora se observa que $v_1 = (0,-2,-2)$ se observa que se puede normalizar este vector y multiplicarlo por -1 con lo que se obtiene el vector $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$ y tomemos $u_2 = v_2$, con esto ya es posible construir la ecución de la circunferencia dada por $p_c(t) = c_0 + r\operatorname{sen}(t)\,u_1 + r\cos(t)\,u_2$ y se observa que $r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ya que (la distancia del origen al centro es el radio) con lo cual se tiene que la circunferencia se encuentra dada como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\sqrt{2}\operatorname{sen}(t)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\sqrt{2}\cos(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que es equivalente a tener

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}\cos(t) \\ 2+2\operatorname{sen}(t) \\ 2+2\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}$$

ahora hay que proyectar el punto p_0 por esa circunferencia, es decir se deben de tomar las rectas de la forma $\ell(a) = p_0 + a(p_c - p_0)$ q ue se observa es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + a\left(\begin{pmatrix} 2\sqrt{2}\cos(t) \\ 2+2\operatorname{sen}(t) \\ 2+2\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 2\sqrt{2}\cos(t) \\ 2+2\operatorname{sen}(t) \\ -6+2\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}$$

aqui si se multiplica por $\frac{1}{2}$ el vector generador se tiene que, (es valido ya que se puede tomar cualquier múltiplo de este) se tiene entonces que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos(t) \\ 1+\operatorname{sen}(t) \\ -3+\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}a\cos(t) \\ a+a\operatorname{sen}(t) \\ 8-3a+a\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}$$

ahora se desea observar la proyección de estas rectas sobre el plano XY y se sabe que este plano cumple la ecuación $z = 0$ por lo que en términos de nuestra recta se observa que se debe cumplir la condición $8 - 3a + a\operatorname{sen}(t) = 0$ por lo que el valor adecuado de a está dado por $a = \frac{8}{3-\operatorname{sen}(t)}$ con lo que al substituir se tiene que a curva corte de el cono proyección con el plano está dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8\sqrt{2}\cos(t)}{3-\operatorname{sen}(t)} \\ \frac{8+8\operatorname{sen}(t)}{3-\operatorname{sen}(t)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

que al diferencia de lo que se esperaba es una circunferencia!, en la imagen 1 se puede observar el cono, la esfera y el plano Π_0 generados en el problema y en la imagen 2 se observa la circunferencia intersección del cono con el plano XY en dos visiones en el espacio como corte del cono con el plano mencionado antes y además se muestra la gráfica de la curva

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8\sqrt{2}\cos(t)}{3-\operatorname{sen}(t)} \\ \frac{8+8\operatorname{sen}(t)}{3-\operatorname{sen}(t)} \end{pmatrix}$$

como se veriá simplemente en el plano

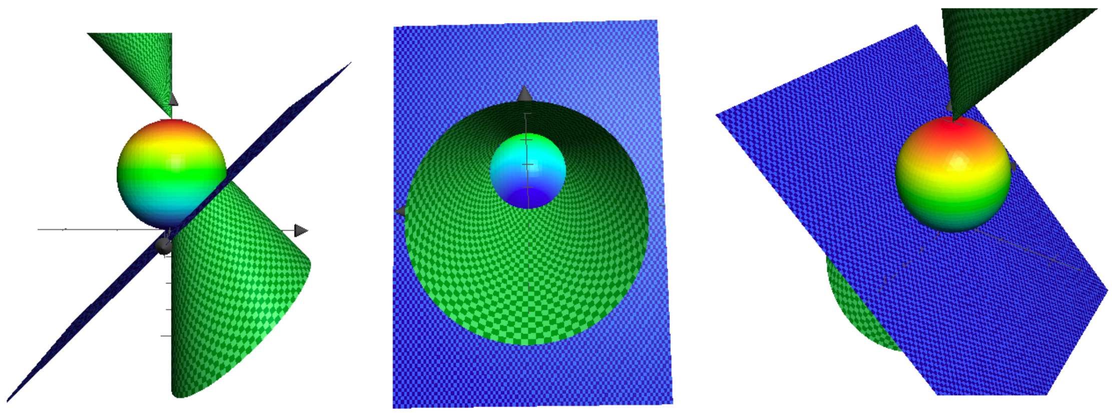

Figura 1: La esfera, el plano y la proyección sobre la circunferencia del punto p_0 que determinan los dos anteriores

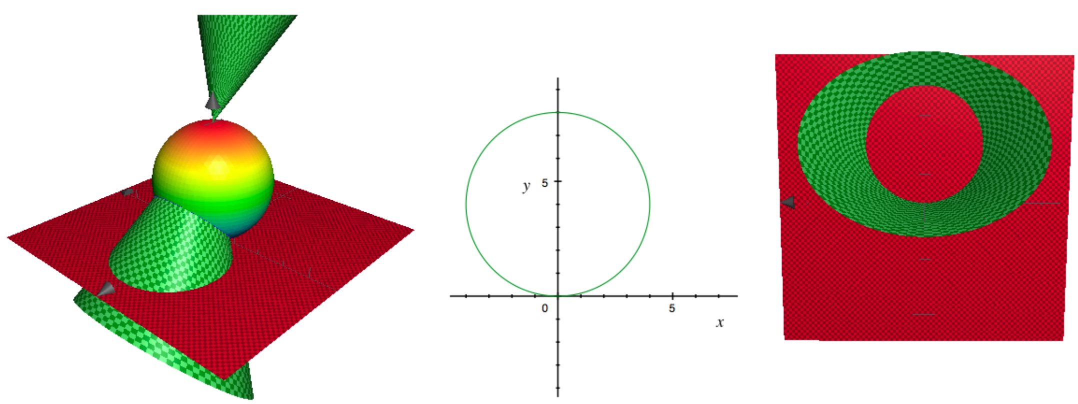

Figura 2: La circunferencia en el plano y el espacio