Geometría Analítica II

Trabajo 33

Prof. Pablo Barrera   Alumno: Ernesto Velasco   Grupo: 4078

1.- Dada la cuádrica $\mathcal{K}_0 : 4y^2 - 9z^2 = 6x$ (un paraboloide hipérbolico) encontrar las 2 familias de rectas generadoras, el par de rectas generadoras que pasan por el punto $p_0 = \left(\frac{7}{6}, 2, 1\right)$, parametrizar la cuádrica en términos de λ, μ y encontrar los valores de ambas que dan las coordenadas de p_0.

Primeramente encontremos las familias de rectas que producen la cuádrica, para ello, se observa que $4y^2 - 9z^2 = 6x$ se puede ver como $(2y+3z)(2y-3z) = (6)(x)$ por lo que podemos observar las dos familias de rectas generadoras como

$$\ell_{g\lambda} : \begin{cases} 2y + 3z = 6\lambda \\ 2y - 3z = \frac{1}{\lambda}x \end{cases}$$

y

$$\ell_{g\mu} : \begin{cases} 2y + 3z = \mu x \\ 2y - 3z = 6\frac{1}{\mu} \end{cases}$$

de aqui es posible parametrizar la superficie en términos de λ y μ, se observa que igualando dos ecuaciones se tiene $6\lambda = \mu x$ con lo que se obtiene $x = 6\frac{\lambda}{\mu}$ ahora bien se tiene que $2y+3z = 6\lambda$ por lo que $2y = 6\lambda - 3z$ sustituyendo en $2y - 3z = 6\frac{1}{\mu}$ se tiene $6\lambda - 3z - 3z = 6\frac{1}{\mu}$ por lo que $6(\lambda - z) = 6\frac{1}{\mu}$ y de esto se sigue que $z = \lambda - \frac{1}{\mu}$ con lo que finalmente se tiene que $z = \frac{\lambda\mu - 1}{\mu}$ por lo que se sustituye en $y = 3\lambda - \frac{3}{2}z = 3\lambda - \left(\frac{3(\lambda\mu-1)}{2\mu}\right) = \frac{6\lambda\mu}{2\mu} + \frac{3-3\lambda\mu}{2\mu} = \frac{3\lambda\mu+3}{2\mu}$ con lo que se tiene finalmente que $y = \frac{3}{2}\left(\frac{\lambda\mu+1}{\mu}\right)$ con lo que ya podemos escribir en forma paramétrica la superficie como

$$\mathcal{K}_0(\lambda, \mu) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\frac{\lambda}{\mu} \\ \frac{3}{2}\left(\frac{\lambda\mu+1}{\mu}\right) \\ \frac{\lambda\mu-1}{\mu} \end{pmatrix}$$

Con esto y tomando en cuenta el punto $p_0 = \left(\frac{7}{6}, 2, 1\right)$ en la cuádrica, se deben encontrar los valores de λ y μ que dan las coordenadas de este punto, sustituyendo las coordenadas de p_0 en una ecuación de cada familia de rectas se tiene que $2(2) + 3(1) = 6\lambda$ y $2(2) - 3(1) = 6\frac{1}{\mu}$

con lo que se observa que los valores buscados son $\lambda = \frac{7}{6}$ y $\mu = 6$ que son los que en la forma paramétrica de la cuádrica determinan el punto p_0. Ahora para terminar solo falta encontrar el par de rectas generadoras que pasan por p_0, primeramente para esto consideremos la forma matricial de la superficie dada, es decir se tiene que

$$\mathcal{K}_0\,(p) : p^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} p + 2 \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} p = 0$$

y observense las rectas que pasan por p_0 es decir las rectas de la forma $p = p_0 + tv$ con $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ si se sustituye la ecuación de la recta en la cuádrica se tiene $(p_0 + tv)^t\, A\,(p_0 + tv) + 2g^t\,(p_0 + tv) = 0$ con lo que se tiene al desarrollar $(v^t Av)\, t^2 + 2\,(p_0^t Av + g^v)\, t + p_0^t Ap_0 + 2g^t p_0 = 0$ pero ya que p_0 pertenece a la cuádrica se tiene que $p_0^t Ap_0 + 2g^t p_0 = 0$ por lo que $(v^t Av)\, t^2 + 2\,(p_0^t Av + g^t v)\, t = 0$ con lo que para encontrar las rectas generadoras, se debe cumplir que $v^t Av = 0$ y $p_0^t Av + g^t v = 0$ por lo que se observa que se debe cumplir que $4\beta^2 - 9\gamma^2 = 0$ y $8\beta - 9\gamma - 3\alpha = 0$ de aqui se observa que $4\beta^2 = 9\gamma^2$ por lo que $\beta = \pm\frac{3}{2}\gamma$ ahora sustituyendo en la otra ecuación se tiene que $\pm 12\gamma - 9\gamma = 3\alpha$ por lo que $\gamma = \frac{3}{(-9\pm 12)}\alpha$ es decir se tiene que $\gamma_1 = \alpha$ y $\gamma_2 = -\frac{1}{7}\alpha$ ahora si se sustituye el valor de γ en la igualdad que se obtuvo para β se tiene que $\beta_1 = \frac{3}{2}\alpha$ y $\beta_2 = \frac{3}{14}\alpha$ por lo que ya tenemos los vectores $v_1 = \left(\alpha, \frac{3}{2}\alpha, \alpha\right)$ y $v_2 = \left(\alpha, \frac{3}{14}\alpha, -\frac{1}{7}\alpha\right)$ con los que se construyen las rectas generadoras

$$\mathcal{P}_1\,(t) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \mathcal{P}_2\,(s) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha s \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{14} \\ -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

En la imagen 1 se puede observar la superficie, el punto p_0 y el par de rectas generadoras que se obtuvieron anteriormente.

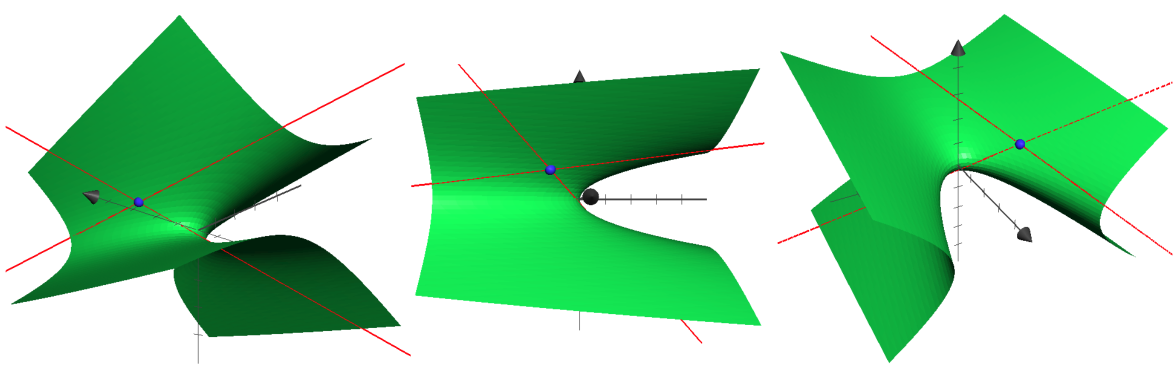

Figura 1: El parabolide hipérbolico y el par de rectas generadoras que pasan por p_0