Geometría Analítica II

Trabajo 32

Prof. Pablo Barrera Alumno: Ernesto Velasco Grupo: 4078

1.- Dada la cuádrica central $\mathcal{K}_0 : 4x^2 - y^2 - z^2 = 1$ y dado el punto $p_0 = \left(1, 1, \sqrt{2}\right)$ sobre la cuádrica, dar el par de rectas generadoras que pasan por p_0, encontrar la familia de rectas generadoras y obtener los valores de λ y μ para p_0

Primeramente encontremos e par de rectas generadoras para p_0 para ello consideremos la recta dada como $p = p_0 + tv$, con $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ y a contnuación escribamos la cuádrica en su forma matricial es decir como

$$\mathcal{K}_0 : p^t \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} p - 1 = 0$$

ahora si sustituimos nuestra recta en la forma matricial de la cuádrica se obtiene lo siguiente $(p_0 + tv)^t A (p_0 + tv) - 1 = 0$ de aquí se tiene que $(v^t A v) t^2 + 2 (p_0^t A v) t + p_0^t A p_0 - 1 = 0$ ahora se observa que esto implica tener $(4\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2) t^2 + 2 \left(4\alpha - \beta - \sqrt{2}\gamma\right) t = 0$ de aqui para encontrar las rectas generadoras se debe de cumplir que $4\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = 0$ y $4\alpha - \beta - \sqrt{2}\gamma = 0$ si se despeja β se obtiene $\beta = 4\alpha - \sqrt{2}\gamma$ si se sustituye en la otra ecuación $4\alpha^2 - \left(4\alpha - \sqrt{2}\gamma\right)^2 - \gamma^2 = 0$ con lo que $4\alpha^2 - 16\alpha^2 + 8\sqrt{2}\alpha\gamma - 2\gamma^2 - \gamma^2 =$ por lo cual $-12\alpha^2 + 8\sqrt{2}\alpha\gamma - 3\gamma^2 = 0$ si se resuelve esta ecuación cuadrática en términos de α se tiene que $\gamma - \frac{8}{3}\sqrt{2}\alpha\gamma = -4\alpha^2$ con lo cual $\left(\gamma - \frac{4}{3}\sqrt{2}\alpha\right)^2 = -4\alpha^2 + \frac{32}{9}\alpha^2$ por lo que se observa $\left(\gamma - \frac{4}{3}\sqrt{2}\alpha\right)^2 = -\frac{4}{9}\alpha^2$ con lo que se tiene $\gamma = \frac{2}{3}\alpha\left(2\sqrt{2} \pm i\right)$ y al sustituir este valor en β se tiene $\beta = \frac{2}{3}\alpha\left(2 \pm \sqrt{2}i\right)$ por lo que se observa que las rectas generadoras están dadas por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \alpha t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2} \pm i\right) \\ \frac{2}{3}\left(2 \pm \sqrt{2}i\right) \end{pmatrix}$$

. Ahora es necesario encontrar la familia de rectas generadoras, para ello consideremos $4x^2 - y^2 - z^2 = 1$ como $4x^2 - 1 = y^2 + z^2$ que se puede observar como $(2x - 1)(2x + 1) = (y - zi)(y + zi)$ de aqui que las dos familias de rectas generadoras se encuentran dadas como

$$\ell_\lambda : \begin{cases} (2x - 1) = \lambda (y - zi) \\ (2x + 1) = \frac{1}{\lambda} (y + zi) \end{cases}$$

y

$$\ell_\mu : \begin{cases} (2x-1) = \mu\,(y+zi) \\ (2x+1) = \frac{1}{\mu}\,(y-zi) \end{cases}$$

finalmente lo solo debemos encontrar los valores de λ y μ para los cuales $\ell_\lambda \cap \ell_\mu = p_0$ si sustituimos los valores de las coordenadas de p_0, en cualquier de las ecuaciones con lo que se observa que $\lambda = \frac{1}{1-\sqrt{2}i} = \frac{1+\sqrt{2}i}{3}$ y $\mu = \frac{1}{1+\sqrt{2}i} = \frac{1-\sqrt{2}i}{3}$ que son los valores para los cuales $\ell_\lambda \cap \ell_\mu = p_0$.