Paulina Pradel Soto **220506**
Geometría Analítica II

TRABAJO 30

Con la siguiente ecuación de una cuádrica y el valor del vector a, encontrar el punto medio de la recta que pasa por la cuádrica y por las coordenadas del vector a, para luego encontrar el conjugado de dicho vector.

$$(3x-2y)^2-(x-3y)^2-10=0 \quad \text{y} \quad a=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$$

Respuestas

Desarrollemos la ecuación de la cuádrica proporcionada

$$\begin{aligned} Q(p) &= (3x-2y)^2-(x-3y)^2=10 \\ &= 9x^2-12xy+4y^2-\left(x^2-6xy+9y^2\right)-10=0 \\ &= 8x^2-5y^2-6xy-10=0 \\ &= \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & -3\\ -3 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=10 \end{aligned}$$

Tenemos el punto $p=p_o+at$, donde $a=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$, por lo tanto $x=x_0+5t$, y $y=y_o+2t$

Sustituyendo en la ecuación de la cuádrica obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} &Q(p)=Q(p_o+at)=8(x_o+5t)^2-5(y_o+2t)^2-6(x_o+5t)(y_o+2t)-10 \\ &=8\left(x_o{}^2+10tx_o+25t^2\right)-5\left(y_o{}^2+4ty_o+4t^2\right)-6\left(x_oy_o+2tx_o+5ty_o+10t^2\right)-10 \\ &=8x_o{}^2+80tx_o+200t^2-5y_o{}^2-20ty_o-20t^2-6x_oy_o-12tx_o-30ty_o-60t^2-10 \\ &=(200-20-60)t^2+(80x_o-20y_o-12x_o-30y_o)t-6x_oy_o-10 \\ &=120t^2+(68x_o-50y_o)t-6x_oy_o-10=0 \end{aligned}$$

Dividimos el coeficiente del término lineal entre la mitad de coeficiente del término cuadrático

$$t_m=\frac{-(t_1+t_2)}{2}=\frac{50y_0-68x_o}{240}$$

Ahora calculemos t_m para dos valores distintos de x_o y y_o

Sean $x_o{}'=0$ y $y_o{}'=1 \Rightarrow t_m{}'=\dfrac{5}{24}$

Sean $x_o'' = 1$ y $y_o'' = 0 \Rightarrow t_m'' = -\frac{17}{60}$

Y sabemos que el punto medio p_m es el siguiente

$$p_m = p_o + t_m a$$

Ahora sustituyamos los valores encontrados para calcular dos puntos y asi encontrar el vector conjugado a a.

$$p_m' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{24}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$p_m'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{17}{60}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos el conjugado de a

$$\tilde{a} = p_m'' - p_m' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{17}{60} - \frac{5}{24}\right)\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{59}{120}\right)\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{120}\begin{pmatrix} -175 \\ -238 \end{pmatrix}$$

Ahora comprobemos si a y $\tilde{a}$ son conjugados:

$$\tilde{a}^t A a = 0$$
$$\begin{pmatrix} -175 & -238 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -175 & -238 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 34 \\ -25 \end{pmatrix} = 0$$