Geometría Analítica II

Trabajo 30

Prof. Pablo Barrera Alumno: Ernesto Velasco Grupo: 4078

1.- Dada la cónica $\mathcal{C}_0 : (3x-2y)^2 - (x-3y)^2 - 10 = 0$, considerar el vector $v = (5,2)$ y todas las rectas de la forma $\ell_x : p = p_0 + tv$, $p_0 \in \{\mathcal{C}_0\}$ con esto encontrar el vector generador de la recta que pasa por todos los punto medios de los cortes de las rectas ℓ_x es decir el A conjugado de v, es decir aquel que cumple que $v^t A p = 0$.

En primer lugar teniendo la que la cónica se encuentra dada por $(3x-2y)^2 - (x-3y)^2 - 10 = 0$ desarrollemos la misma, por lo que se tiene $9x^2 - 12xy + 4y^2 - x^2 + 6xy - 9y^2 - 10 = 0$ con lo que se tiene $8x^2 - 6xy - 5y^2 - 10 = 0$, ahora escribamos la ecuación matricial de esa cónica se encuentra dada por

$$\mathcal{C}_0(p) : p^t \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} p - 10 = 0$$

ahora en esta podemos hacer una sustitución de la recta en la ecuación matricial con lo que se tendría $\mathcal{C}_0(p_0 + tv) : (p_0 + tv)^t A (p_0 + tv) - 10 = 0$ de aquí obtenemos al desarrollar $p_0^t A p_0 + 2tv^t A p_0 + t^2 v^t A v - 10 = 0$ que se puede observar como una ecuación cuadratica en términos de t ahora la ecuación se puede ver como $v^t A v \left(t^2 + 2\frac{v^t A p_0}{v^t A v} + \frac{p_0^t A p_0 - 10}{v^t A v} \right) = 0$ ahora sabemos que los valor de t para los cuales se satisface la ecuación son las raices de la misma por lo que sabemos que los valores de t los cuales la recta corta la cónica dan que $-(t_1 + t_2) = 2\frac{v^t A p_0}{v^t A v}$ de aqui la t adecuada es decir la del punto medio entre t_1, t_2 se encuentra dada por $t_m = \frac{t_1 + t_2}{2} = -\frac{p_0^t A v}{v^t A v}$ sustituyendo los valores que tenemos para A y v se tiene que $t_m = -\frac{34x_0 - 25y_0}{130}$, ahora solo es necesario obtener dos puntos medios en dos rectas distintas para obtener el vector que queremos (el A conjugado de v) obtengamos un punto medio de alguna recta para ello consideremos el punto $p_1 = \left(2, \frac{-12-\sqrt{584}}{10}\right)$ ahora bien para este punto obtenemos el valor de $t_{m1} = -\frac{900+25\sqrt{584}}{1300}$ ahora si sustituimos el valor de t_{m1} en la ecuación vectorial de tal manera que $p = p_1 + t_{m1} v$, con lo que se observa que el punto esta dado por

$$P_{m1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{12}{10} - \frac{\sqrt{584}}{10} \end{pmatrix} - \left(\frac{980 + 25\sqrt{584}}{1300} \right) \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

, para obtener el segundo punto medio tomemos otro punto cualquiera sea este $p_2 = \left(2, \frac{-12+\sqrt{584}}{10}\right)$

ahora bien para este punto obtenemos el valor de $t_{m1} = -\frac{900-25\sqrt{584}}{1300}$ ahora si sustituimos el valor de t_{m2} en la ecuación vectorial de tal manera que $p = p_2 + t_{m2}v$, con lo que se observa que el punto esta dado por

$$P_{m2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{12}{10} + \frac{\sqrt{584}}{10} \end{pmatrix} - \left(\frac{980 - 25\sqrt{584}}{1300} \right) \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por lo que el vector que se busca es $v_c = p_{m1} - p_{m2}$. ahora se puede observar en la imagen 1 la cónica, algunas rectas de la familia y la recta que pasa por los puntos medios de los cortes de cada recta con la cónica, es decir la generada por el vector v_c.

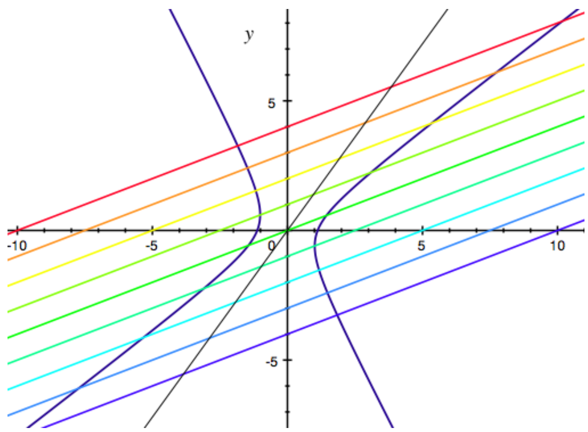

Figura 1: la cónica, rectas generadas por v y v_c