Geometría Analítica II

Trabajo 2

Prof. Pablo barrera | Alumno: Ernesto Velasco | Grupo: 4078

1.- Observe la figura $\mathcal{L}$, determinada por $P_1(-3,3)$, $P_2(0,0)$ y $P_3(3,3)$ encuentre el lugar geométrico de los puntos que distan de 1, 2, 3 y 4 unidades de esa figura.

Primero consideremos ciertas regiones que la misma figura delimita, en primer caso considérese el área que muestra con lineas oblicuas la imagen 1, dentro de estas franjas todo punto P, tendrá como distancia mínima a $\mathcal{L}$ la determinada por el segmento que va perpendicularmente de P a $\overline{P_1P_2}$ ó a $\overline{P_2P_3}$ respectivamente en la figura, por lo que el lugar geométrico de los puntos que distan k unidades de $\mathcal{L}$, que se localicen dentro de esas zonas formarán segmentos paralelos a a $\overline{P_1P_2}$ ó a $\overline{P_2P_3}$ en cada región.

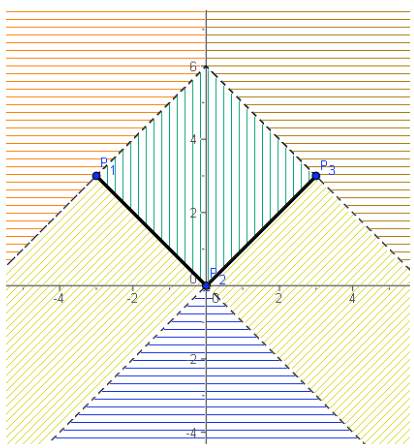

Figura 1: Delimitación de las zonas respecto de su cercanía a la Figura $\mathcal{L}$

En segundo lugar se encuentra los puntos cuya localización sea dentro del cuadro formado por las proyecciones de $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_2P_3}$, (zona marcada por lineas verticales en la imagen 1), para este conjunto de puntos sucederá algo muy similar a lo que ocurría con el conjunto de puntos anteriores, se formaran segmentos paralelos a $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_2P_3}$ pero estos segmentos se intersectarán en el eje y que es la diagonal entre $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_2P_3}$, produciendo figuras semejantes a la original. Por ultimo las regiones marcadas con barras horizontales son aquellas en los que la distancia mínima de cualquier punto a $\mathcal{L}$ es a P_1, P_2 o P_3 por lo que el conjunto de ellos conformara arcos de circunferencia con centro en P_1, P_2 o P_3, cabe mencionar que el eje y es la mediatriz entre P_1 y P_2, por lo cual los arcos de circunferencia con $r > 3\sqrt{2}$ se cortarán en el mismo. una vez hechas estas consideraciones podemos concluir que para valores de 1 a 4 el conjunto de puntos genera el gráfico que se muestra en la imagen 2.

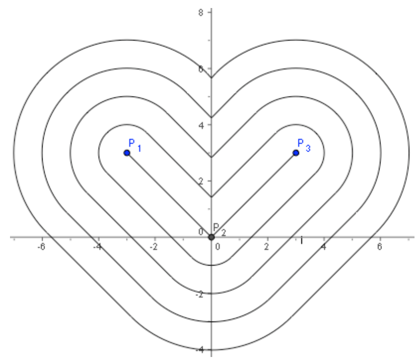

Figura 2: $D_{\mathcal{L}} := \{P \mid d(P, \mathcal{L}) = t, t = \{1, 2, 3, 4\}\}$

2.-Considere ahora el punto P_0 y la figura $\mathcal{F}$ del inciso anterior. Determine el lugar geométrico $\{P \mid d(P, P_0) = d(P, \mathcal{F})\}$ es decir, el eje medial entre ambas figuras (el punto y $\mathcal{F}$)

Nuevamente antes de tratar de encontrar este lugar geométrico es necesario hacer algunas consideraciones importantes, la primera que todo punto que pertenezca al mismo debe encontrarse por encima de los segmentos de $\mathcal{F}$, por lo cual podemos considerar momentáneamente los segmentos como rectas con lo que los mismos tendrán ecuaciones $x + y = 0$ y $x - y = 0$ aplicando la for-

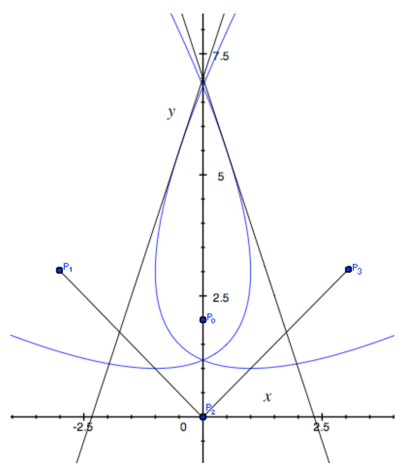

Figura 3: $\mathcal{F}$ y P_0 y la constrcción de su eje medial

mula de la distancia de un punto a una recta se tiene: $d(P, P_0) = d(P, \mathcal{F})$ es para $x + y = 0$, $\frac{x+y}{\sqrt{2}} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2}$ con lo cual se obtiene la ecuación $-x^2 + 2xy - y^2 + 8y - 8 = 0$, análogamente para $x - y = 0$ se tiene $-x^2 + 2xy - y^2 + 8y - 8 = 0$ que graficando nos dan dos parábolas rotadas como lo muestra la imagen 3, más sin embargo este conjunto de puntos que se que forman una figura parecida a una gota no es completamente el conjunto que se busca, ya que como en el ejercicio anterior se menciona esta gráfica sale del área en la que esta formula es valida, por lo que usando las coordenadas de P_0, P_1 o P_3 en su respectivo caso se obtienen las ecuaciones siguientes $6x - 2y + 14$ para P_0 y P_1, asi como $6x - 2y + 14$ para P_0 y P_3, que son las dos rectas negras en la imagen 3, unas vez unificadas las figuras se obtendrá en efecto la forma de una gota tal y como la muestra la construcción definitiva la imagen 4, en la que se han tomando solo los intervalos adecuados.

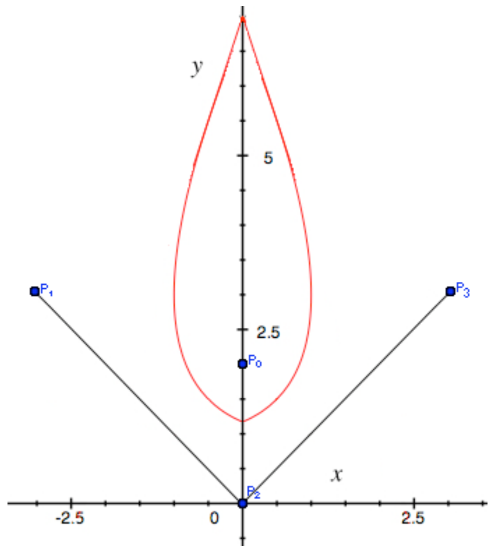

Figura 4: $\mathcal{F}$, P_0 y el eje medial entre ambos

3.- Demuestre que un punto P se encuentra sobre la recta $\mathcal{L}$ que determinan los puntos P_1 y P_2 si y sólo si, P se puede escribir de la forma $P = \alpha P_1 + \beta P_2$ para algún α y β de tal manera que $\alpha + \beta = 1$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Sea $\mathcal{L}$ una recta en $\mathbb{R}^n$ determinada por los puntos P_1 y P_2, y P un punto sobre la recta $\mathcal{L}$, ya que $\mathcal{L}$ está determinada por P_1 y P_2 esto implica que $\mathcal{L}$ tiene ecuación paramétrica $\mathcal{L} = P_1 + s\,(P_2 - P_1)$, por lo cual $\mathcal{L} := \{P_\jmath \,|\, P_\jmath = P_1 + s\,(P_2 - P_1)\,, s \in \mathbb{R}\}$ ya que $P \in \mathcal{L}$ entonces P satisface que $P = P_1 + s\,(P_2 - P_1)$ para algún $s \in \mathbb{R}$, desarrollando $P = P_1 - sP_1 + sP_2 = (1 - s)\,P_1 + sP_2$. Sean entonces $\alpha = (1 - s)$ y $\beta = s$ por lo que $P = \alpha P_1 + \beta P_2$ y $\alpha + \beta = 1 - s + s = 1$

$\boxed{1)}$ $\therefore$ Si P se encuentra sobre la recta $\mathcal{L}$ determinada por la pareja de puntos $P_1,\, P_2 \implies P = \alpha P_1 + \beta P_2$, con $\alpha + \beta = 1$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $\mathcal{L}$ una recta en $\mathbb{R}^n$ determinada por los puntos P_1 y P_2, y P un punto P tal que $P = \alpha P_1 + \beta P_2$, con $\alpha + \beta =$, ya que α y β son escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ahora sea $s_p \in \mathbb{R}$ tal que $s_p = \beta$ por lo que $s_p + \alpha = 1$ con lo que $\alpha = 1 - s_p$, sustituyendo en la ecuación de P se tiene $P = (1 - s_p)\,P_1 + s_p P_2 = P_1 - s_p P_1 + s_p P_2 = P_1 + s_p\,(P_2 - P_1)$ ya que $\mathcal{L}$ esta definida por P_1 y P_2, $\mathcal{L} := \{P_\jmath \,|\, P_\jmath = P_1 + s\,(P_2 - P_1)\,, s \in \mathbb{R}\}$, ya que P cumple la ecuación para $s = s_P$ se tiene que $P \in \mathcal{L}$, es decir P pertenece a la recta $\mathcal{L}$ definida por P_1 y P_2

$\boxed{2)}$ $\therefore$ Si P es un punto tal que $P = \alpha P_1 + \beta P_2$, con $\alpha + \beta = 1 \implies P$ se encuentra sobre la recta $\mathcal{L}$ determinada por la pareja de puntos P_1, P_2

$\therefore$ Por 1) y 2) un punto P se encuentra sobre la recta $\mathcal{L}$ que determinan P_1 y $P_2 \iff P$ cumple $P = \alpha P_1 + \beta P_2$ con $\alpha + \beta = 1$