Geometría Analítica II

Trabajo 29

Prof. Pablo Barrera Alumno: Ernesto Velasco Grupo: 4078

1.- Dada la cuádrica $\mathcal{K}_0 : 4x^2 + y^2 - z^2 = 1$, y además teniendo el punto $p_0 = \left(1, 0, \sqrt{3}\right)$ encontrar el par de rectas generadoras que pasan por ese punto.

Considerese primeramente la familia de rectas que pasan por el punto p_0, es decir se tendrán rectas de la forma $\ell_1 : Q(t) = p_0 + t\vec{\lambda}$ es decir se observa que la recta se encuentra dada como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha t \\ \beta t \\ \sqrt{3} + \gamma t \end{pmatrix}$$

ahora tomense los valores de t para los cuales la recta ℓ_1 corta a la cuádrica, para ello sustituyamos los valores en x, y, z de la recta en la ecuación de la cuádrica, con lo cual se tiene $4(1 + \alpha t)^2 + (\beta t)^2 - \left(\sqrt{3} + \gamma t\right)^2 = 1$ que implica el que $4(1 + 2\alpha t + \alpha^2 t^2) + \beta^2 t^2 - \left(3 + 2\sqrt{3}\gamma t + \gamma^2 t^2\right) = 1$ por lo que $4 + 8\alpha t + 4\alpha^2 t^2 + \beta^2 t^2 - 3 - 2\sqrt{3}\gamma t - \gamma^2 t^2 = 1$ con lo que se obtiene finalmente que $(4\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)\, t^2 + \left(8\alpha - 2\sqrt{3}\gamma\right) t = 0$ ahora bien para encontrar las rectas generadoras se debe de cumplir que

$$\begin{gathered} 4\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 0 \\ 8\alpha - 2\sqrt{3}\gamma = 0 \end{gathered}$$

ya que esto hace que no importa el valor de t dado la recta siempre satisface la ecuación de la cuádrica, es deci, de alguna manera extraña se encuentra contenida en la superficie de la cuádrica, ahora para que esto pase se deben dar las dos condiciones mencionadas antes, pero ya que al parecer no están univocamente definidas las soluciones de α, β, γ como variables, resolvamos todo el sistema en términos de α resolviendo se tiene que en términos de α, $\gamma = \frac{4}{\sqrt{3}}\alpha$ y $\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\alpha$, por lo cual las dos rectas generadoras se encontrarán dadas por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha t \\ \frac{2}{\sqrt{3}}\alpha t \\ \sqrt{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}\alpha t \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha t \\ -\frac{2}{\sqrt{3}}\alpha t \\ \sqrt{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}\alpha t \end{pmatrix}$$

que se observa claramente siempre satisfacen la ecuación de la cuádrica, por lo que están contenidas dentro de la superficie, en la imagen 1 se pueden observar algunas vistas del

nuestro punto sobre la superficie y de las dos rectas que claramente son en todo punto parte de esta superficie.

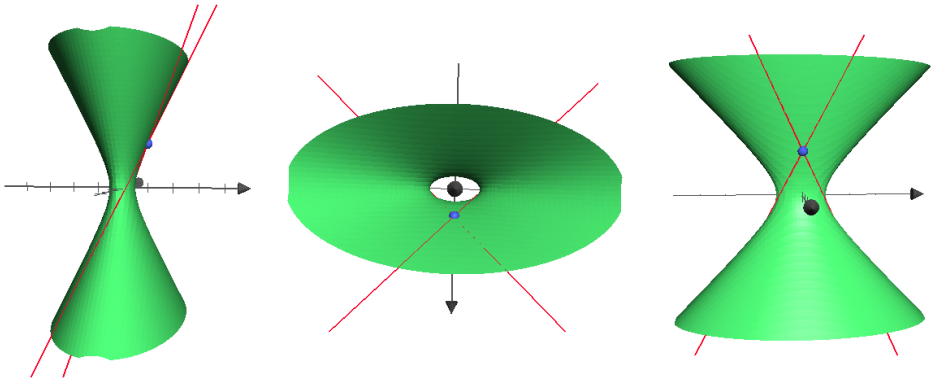

Figura 1: La cuádrica el punto y las dos rectas generadoras