Paulina Pradel Soto **170506**
Geometría Analítica II

TRABAJO 28

1. Encontrar si las siguientes cuádricas son centrales o no, y resolver el problema de los valores propios para poder saber cual es la forma de la cónica.

   a) $2x^2 - 6y^2 - 3z^2 - 11yz + 5zx + xy + x + y - 2z + 1 = 0$
   b) $8x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 8yz - 4zx - 4xy + 3x + 6y + 6z = 0$

RESPUESTAS

a) $2x^2 - 6y^2 - 3z^2 - 11yz + 5zx + xy + x + y - 2z + 1 = 0$

Primero identifiquemos las matrices que caracterizan a esta ecuación

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 5/2 \\ 1/2 & -6 & -11/2 \\ 5/2 & -11/2 & -3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \gamma = 1$$

Veamos primero si tiene centro, es decir debe de existir una solución para el sistema $Ap = -g$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 5/2 \\ 1/2 & -6 & -11/2 \\ 5/2 & -11/2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x_0 + \frac{1}{2}y_0 + \frac{5}{2}z_0 &= -1 \\ \frac{1}{2}x_0 - 6y_0 - \frac{11}{2}z_0 &= -1 \\ \frac{5}{2}x_0 - \frac{11}{2}y_0 - 3z_0 &= 2 \end{aligned}$$

Tratamos de resolver el problema anterior con Maple y haciendo las cuentitas, sin embargo encontramos que el sistema no tiene solución, por lo tanto la cuádrica no tiene centro.
Por lo tanto resolvamos el problema de los valores propios

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1/2 & 5/2 \\ 1/2 & -6-\lambda & -11/2 \\ 5/2 & -11/2 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = (2-\lambda)\left[(-6-\lambda)(-3-\lambda) - \tfrac{121}{4}\right] - \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}(-3-\lambda) + \tfrac{55}{4}\right] + \tfrac{5}{2}\left[-\tfrac{11}{4} - \tfrac{5}{2}(-6-\lambda)\right]$$

Resolviendo este polinomio con maple obtenemos las siguientes raíces:

$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 = \tfrac{7}{2}$$
$$\lambda_3 = -\tfrac{21}{2}$$

Para $\lambda_1 = 0$

$(A - \lambda_1 I)u_1 = (A)u_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & \tfrac{1}{2} & \tfrac{5}{2} \\ \tfrac{1}{2} & -6 & -\tfrac{11}{2} \\ \tfrac{5}{2} & -\tfrac{11}{2} & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nuestro sistema de ecuaciones es el siguiente

$$2a - \frac{1}{2}b + \frac{5}{2}c = 0$$
$$\frac{1}{2}a - 6b - \frac{11}{2}c = 0$$
$$\frac{5}{2}a - \frac{11}{2}b - 3c = 0$$

Para el sistema de ecuaciones anteriores encontramos que el vector es el siguiente

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora veamos para el valor de $\lambda_2 = \frac{7}{2}$,

$$(A - \lambda_2 I)u_2 = \begin{pmatrix} -\tfrac{3}{2} & \tfrac{1}{2} & \tfrac{5}{2} \\ \tfrac{1}{2} & -\tfrac{19}{2} & -\tfrac{11}{2} \\ \tfrac{5}{2} & -\tfrac{11}{2} & -\tfrac{13}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

El sistema de ecuaciones es el siguiente

$$-3a+b+5c=0$$
$$a-19b-11c=0$$
$$5a-11b-13c=0$$

Igual que para el valor anterior obtenemos el siguiente vector

$$u_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Ahora lo hacemos para $\lambda_3=-21/2$

$$(A-\lambda_3 I)u_3=\begin{pmatrix}25/2 & 1/2 & 5/2\\ 1/2 & 9/2 & -11/2\\ 5/2 & -11/2 & 15/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$$

El sistema de ecuaciones es el siguiente

$$25a+b+5c=0$$
$$a+9b-11c=0$$
$$5a-11b+15c=0$$

Aquí multipliquemos la primera ecuación por -3 y sumémosla a la tercera

$$-75a-3b-15c=0$$
$$\underline{5a-11b+15c=0}$$
$$-70a-14b=0$$

de donde obtenemos que $b=-5a$, sustituyamos esto en la segunda ecuación

$$a+9(-5a)-11c=0$$
$$c=-4a$$

de esta manera tenemos que

$$u_3=\begin{pmatrix}a\\-5a\\-4a\end{pmatrix}$$

Hagamos $a=1$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Normalizamos este vector

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Entonces en este nuevo sistema tenemos lo siguiente

$$p = \hat{x}u_1 + \hat{y}u_2 + \hat{z}u_3$$

$$p = [u_1 \mid \quad u_2 \mid \quad u_3] \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = U\hat{p}$$

Sustituimos

$$\begin{aligned} & p^t Ap + 2g^t p + \gamma = 0 \\ & (U\hat{p})^t A(Up) + 2g^t (U\hat{p}) + \gamma = 0 \\ & \hat{p}^t (U^t AU) p + 2g^t U\hat{p} + \gamma = 0 \end{aligned}$$

$$\hat{A} = (U^t AU)$$

$$\hat{A} = (U^t AU) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{42}} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{\sqrt{42}} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{\sqrt{42}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -6 & -\frac{11}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{11}{2} & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{42}} & -\frac{5}{\sqrt{42}} & -\frac{4}{\sqrt{42}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/84 & 25/84 & 5/21 \\ 5/14 & 25/14 & 10/7 \\ 2/7 & 10/7 & 8/7 \end{bmatrix}$$

$$2g^t U\hat{p} + \gamma = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/\sqrt{42} \\ 0 & 0 & -5/\sqrt{42} \\ 0 & 0 & -4/\sqrt{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} + 1 = \frac{8}{\sqrt{42}} \hat{z} + 1$$

Por lo tanto nuestra ecuación queda de la siguiente manera

$$\frac{7}{84}x^2 - \frac{25}{14}y^2 - \frac{8}{7}z^2 + \frac{55}{84}xy - \frac{13}{77}xz - \frac{20}{7}yz + \frac{8}{\sqrt{42}}z + 1 = 0$$

Graficando esta expresión con maple obtenemos un cono parabólico