Geometría Analítica II

Trabajo 28

Prof. Pablo Barrera Alumno: Ernesto Velasco Grupo: 4078

1.- Dada la cuádrica $\mathcal{K}_0 : 2x^2 - 6y^2 - 3z^2 - 11yz + 5xz + xy + x + y - 2z + 1 = 0$, centrar la cuádrica, y resolver el problema de valores y vectores caracerísticos para dicha cuádrica.

Para comenzar escribamos la cuádrica en su forma matricial es decir como

$$\mathcal{K}_1 : p^t \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -6 & -\frac{11}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{11}{2} & -3 \end{pmatrix} p + 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} p + 1 = 0$$

ahora haciendo $p - p_0 = \tilde{p}$ y despejando $p = \tilde{p} + p_0$ los que al sustituir en $\mathcal{K}_0 : p^t Ap + 2g^t p + \gamma = 0$ se tiene $(\tilde{p} + p_0)^t A (\tilde{p} + p_0) + 2g^t (\tilde{p} + p_0) + \gamma = 0$ que a desarrollar implica tener $\tilde{p}^t A\tilde{p} + 2(p_0^t A + g^t)\tilde{p} + p_0^t Ap_0 + 2g^t p_0 + \gamma = 0$, ahora para centrar la cuádrica se debe eliminar el termino lineal es decir se debe de cumplir para ello que $p_0^t A + g^t = 0$ lo que equivale a tener la condición $Ap_0 = -g$ lo que lleva a resolver el sistema de ecuaciones siguiente

$$\begin{aligned} 2x_0 + \tfrac{1}{2}y_0 + \tfrac{5}{2}z_0 &= -\tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2}x_0 - 6y_0 - \tfrac{11}{2}z_0 &= -\tfrac{1}{2} \\ \tfrac{5}{2}x_0 - \tfrac{11}{2}y_0 - 3z_0 &= 1 \end{aligned}$$

que haciendo las siguientes consideraciones se observa es un sistema sin solución para ello multipliquemos por 2 todo el sistema, se obtiene el sistema equivalente siguiente

$$\begin{aligned} 1) &\quad 4x_0 + y_0 + 5z_0 = -1 \\ 2) &\quad x_0 - 12y_0 - 11z_0 = -1 \\ 3) &\quad 5x_0 - 11y_0 - 6z_0 = 2 \end{aligned}$$

ahora si se suman las ecuaciones 1) y 2) se observa que se obtiene $5x_0 - 11y_0 - 6z_0 = -2$ pero se debe cumplir 3) que al ser iguales en un termino de la igualdad, para cumplirse debería suceder que $2 = -2$ pero esto obviamente no es cierto por lo cual la cuádrica no tiene centro y no es posible eliminar el termino lineal. Ahora determinado esto pasemos al problema de los vectores y valores propios tomemos como de costumbre el problema $Au = \lambda u$ que implica $(A - \lambda I)u = 0$ veasé que determina esta

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -6-\lambda & -\frac{11}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{11}{2} & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

ahora si consideramos el determinante de las misma se tiene $(2-\lambda)\left((-6-\lambda)(-3-\lambda)-\frac{121}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(-3-\lambda)+\frac{55}{4}\right)+\frac{5}{2}\left(-\frac{11}{4}-\frac{5}{2}(-6-\lambda)\right)=(2-\lambda)\left(\lambda^2+9\lambda-\frac{49}{4}\right)+\frac{1}{4}\lambda+\frac{25}{4}\lambda-\frac{49}{8}+\frac{245}{8}=-\lambda^3-7\lambda^2+\frac{147}{4}\lambda$ por lo que el polinomio característico está dado por $\lambda^3+7\lambda-\frac{147}{4}\lambda=0$ ahora solo es necesario encontrar los valores solución de dicha ecuación que se observa al resolver son $\lambda_1=\frac{7}{2}$, $\lambda_2=0$ y $\lambda_3=-\frac{21}{2}$ ahora si usamos dichos valores para nuestro problema se tienen los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\begin{array}{lll}
-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{5}{2}z=0 & 2x+\frac{1}{2}y+\frac{5}{2}z=0 & \frac{25}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{5}{2}z=0\\
\frac{1}{2}x-\frac{19}{2}y-\frac{11}{2}z=0 & \frac{1}{2}x-6y-\frac{11}{2}z=0 & \frac{1}{2}x+\frac{9}{2}y-\frac{11}{2}z=0\\
\frac{5}{2}x-\frac{11}{2}y-\frac{13}{2}z=0 & \frac{5}{2}x-\frac{11}{2}y-3z=0 & \frac{5}{2}x-\frac{11}{2}y+\frac{15}{2}z=0
\end{array}$$

que si tomamos un vector solucion para cada uno se observa que los vectores solucion son los siguientes $v_1=(3,-1,2)$, $v_2=(-1,-1,1)$ y $v_3=(-1,5,4)$ ahora solo normalicemos esos vectores que nos dan $u_1=\left(\frac{3}{\sqrt{15}},-\frac{1}{\sqrt{15}},\frac{2}{\sqrt{15}}\right)$, $u_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y $u_3=\left(-\frac{1}{\sqrt{42}},\frac{5}{\sqrt{42}},\frac{4}{\sqrt{42}}\right)$ con los que podemos conformar la matriz siguiente

$$B=\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{15}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{42}}\\ -\frac{1}{\sqrt{15}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5}{\sqrt{42}}\\ \frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{42}}\end{pmatrix}$$

en la imagen 1 se puede observar la superficie antes y después de la transformación.

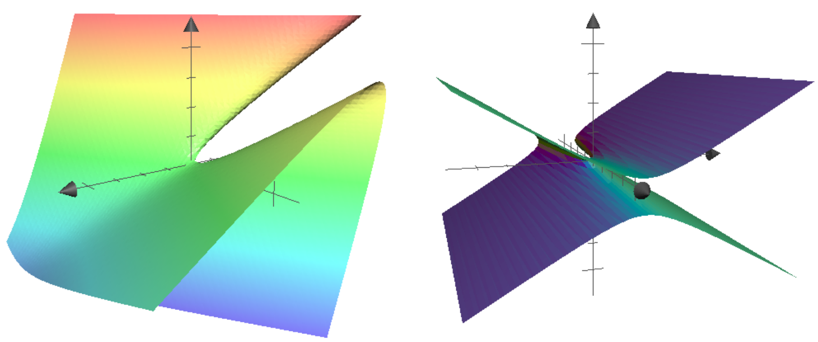

Figura 1: La cuádrica antes y después de la transfromación

2.- Dada la cuádrica $\mathcal{K}_1: 8x^2+5y^2+5z^2-8yz-4xz-2xy+3x+6y+6z=0$, centrar la cuádrica, y resolver el problema de valores y vectores caracerísticos para dicha cuádrica.

Nuevamente consideremos la forma matricial de la misma, dada por

$$\mathcal{K}_1(p): p^t\begin{pmatrix}8 & -1 & -2\\ -1 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}p+2\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 3 & 3\end{pmatrix}p=0$$

de igual manera como se hizo anterior mente consideremos el cambio de variable dado por $p=\tilde{P}+p_0$ que nos lleva como ya se vio antes a $\tilde{p}^tA\tilde{p}+2\left(p_0^tA+g^t\right)\tilde{p}+p_0^tAp_0+2g^tp_0+\gamma=0$, que para eliminar el termino lineal como se dijo antes implica resolver $Ap_0 = -g$ que es el sistema de ecuaciones

$$8x_0 - y_0 - 2z_0 = -\tfrac{3}{2}$$
$$-x_0 + 5y_0 - 4z_0 = -3$$
$$-2x_0 - 4y_0 + 5z_0 = -3$$

que al resolver nos indica que el centro de la cuádrica esta dada por $p_0 = \left(-\frac{189}{62}, -\frac{459}{62}, -\frac{240}{31}\right)$ por lo que ahora para tener la nueva ecuación matricial solo es necesario encontrar el termino lineal nuevo, el cual si se recuerda esta dado por $\tilde{\gamma} = p_0^t A p_0 + 2g^t p_0 + \gamma = g^t p_0 + \gamma$ con lo que se observa $\tilde{\gamma} = -\frac{6201}{124}$ ahora lo que falta es resolver el problema de los valores y vectores característicos, para ello vuelvase a considerar resolver el problema $(A - \lambda I)\,u = 0$ por lo que primeramente veamos la matriz dada por este problema que seria

$$\begin{pmatrix} 8-\lambda & -1 & -2 \\ -1 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

ahora si consideramos el determinante de esta matriz se tiene $(8-\lambda)\left((5-\lambda)^2 - 16\right) + (\lambda - 5) - 8 - 2\left(4 + 2\left(5-\lambda\right)\right) = (8-\lambda)\left(\lambda^2 - 10\lambda + 9\right) + \lambda - 13 - 2\left(14 - 2\lambda\right) = -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 84\lambda + 31$ por lo que nuestra ecuación cubica en λ esta dada por $\lambda^3 - 18\lambda^2 + 84\lambda - 31 = 0$ ahora encontrando las raices de este polinomio, se tiene que las raices son en forma de vector son

$$\left[\begin{array}{c} \frac{1}{2}\left(-164+4\,I\sqrt{367}\right)^{(1/3)} + \frac{16}{\left(-164+4\,I\sqrt{367}\right)^{(1/3)}} + 6 \\ -\frac{1}{4}\left(-164+4\,I\sqrt{367}\right)^{(1/3)} - \frac{8}{\left(-164+4\,I\sqrt{367}\right)^{(1/3)}} + 6 + \frac{1}{2}\,I\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\left(-164+4\,I\sqrt{367}\right)^{(1/3)} - \frac{16}{\left(-164+4\,I\sqrt{367}\right)^{(1/3)}}\right) \\ -\frac{1}{4}\left(-164+4\,I\sqrt{367}\right)^{(1/3)} - \frac{8}{\left(-164+4\,I\sqrt{367}\right)^{(1/3)}} + 6 - \frac{1}{2}\,I\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\left(-164+4\,I\sqrt{367}\right)^{(1/3)} - \frac{16}{\left(-164+4\,I\sqrt{367}\right)^{(1/3)}}\right) \end{array}\right]$$

que nos ayudan a encontrar los vectores solución para cada uno de los casos de $Au = \lambda u$.